



Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје  
**ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИЧКИ НАУКИ И  
КОМПЈУТЕРСКО ИНЖЕНЕРСТВО**

НАСОКА

КОМПЈУТЕРСКИ МРЕЖИ И Е-ТЕХНОЛОГИИ

МАГИСТЕРСКА ТЕЗА

---

**Примена на теоријата на случајни  
матрици при определување на  
фундаменталните граници на некои  
безжични комуникациски мрежи**

---

*Автор:*

Томе Ефтимов

*Ментор:*

Проф. Д-р Љупчо Коцарев

Јуни 2013

## *Анстракт*

### **Примена на теоријата на случајни матрици при определување на фундаменталните граници на некои безжични комуникациски мрежи**

од Томе Ефтимов

Теоријата на случајни матрици наоѓа примена во голем број на области во физиката, статистиката и инженерството. Раните зачетоци на теоријата на случајни матрици потекнуваат од практични експериментални проблеми, а денес наоѓа примена во различни области вклучувајќи ги стохастичките диференцијални равенки, статистичка физика, хаотични системи, невронски мрежи, теорија на информации, процесирање на сигнали и “small-world” мрежи. Што се однесува до комуникациските канали кои ни се од интерес, ние се задржуваме на каналот со повеќекратен пристап ("Multiple-Access Channel") и каналот со реле ("Relay Channel"). Овие канали може да се сметаат како специјални случаи или основни градечки блокови на поопшти комуникациски мрежи. Резултатите кои се добиени овде се однесуваат на некохерентна комуникација (без познавање на реализацијата на каналот на предавателна и приемна страна), односно применувајќи знаења од теоријата на случајни матрици се решаваат проблеми поврзани со теоријата на информации, кои придонесуваат во разбирањето на некохерентната комуникација, а исто така ќе претставуваат и основа за идни нови истражувања во оваа област.

## *Благодарност*

Би сакал да се заблагодарам на мојот ментор Ак. Проф. Др. Љупчо Коцарев за неговата помош и поддршка за време на студиите и изработката на овој магистерски труд, како и што ми овозможи да бидам дел од лабораторијата за комплексни системи и мрежи при Македонската Академија за Науки и Уметности, од каде потекнува и можноста за соработка со Доц. Д-р Зоран Утковски.

Исто така би сакал да се заблагодарам на Доц. Д-р Зоран Утковски од Универзитетот "Гоце Делчев" - Штип, за неговата несебична соработка за време на работата на овој магистерски труд.

Благодарност и до Доц.Д-р Ласко Баснарков за дискусиите кои ги водевме при решавање на проблемите кои се дел од овој магистерски труд.

# Содржина

<b>Апстракт</b>	<b>i</b>
<b>Благодарност</b>	<b>ii</b>
<b>Листа на слики</b>	<b>v</b>
<b>Симболи</b>	<b>vi</b>
<b>1 Вовед</b>	<b>1</b>
<b>2 Теорија на случајни матрици</b>	<b>3</b>
2.1 Комплексни случајни вектори . . . . .	3
2.1.1 Комплексни Гаусови случајни вектори . . . . .	3
2.1.2 Комплексни случајни вектори рамномерно распределени на единечна сфера . . . . .	4
2.2 Факторизација на матрици . . . . .	5
2.2.1 SV декомпозиција . . . . .	5
2.2.2 Триаголни факторизации . . . . .	5
2.2.3 QR декомпозиција . . . . .	6
2.2.4 Спектрална декомпозиција . . . . .	6
2.2.5 "Bartlett" декомпозиција и детерминанти на случајни матрици од рамномерен "Gramm" и "Wishart" ансамбли . . . . .	7
2.3 Јакобијани при факторизација на матрици . . . . .	7
<b>3 Теорија на информации</b>	<b>9</b>
3.1 Ентропија . . . . .	9
3.1.1 Ентропија на дискретна случајна променлива . . . . .	9
3.1.2 Ентропија на непрекинатата случајна променлива . . . . .	10
3.2 Заедничка информација . . . . .	11
3.2.1 Заедничка информација на дискретна случајна променлива . . . . .	12
3.2.2 Заедничка информација на непрекинатата случајна променлива . . . . .	13
3.3 Капацитет на каналот . . . . .	13
3.3.1 Својства на капацитетот на каналот . . . . .	14
3.4 Multiple Access Channel-MAC . . . . .	15
3.4.1 MAC со $m$ - корисници . . . . .	17
3.5 Канал со реле . . . . .	17

<b>4</b>	<b>Преглед на некохерентна комуникација</b>	<b>19</b>
4.1	Комуникација преку Грасманови многуобразија. Капацитет на "point-to-point" MIMO канал при некохерентна комуникација . . . . .	20
4.1.1	Модел на системот . . . . .	20
4.1.2	Некои познати резултати . . . . .	21
4.1.3	Штифелови и Грасманови многуобразија . . . . .	22
4.1.4	Некохерентна комуникација кога $M = N, T \geq 2M$ . . . . .	23
4.1.5	Некохерентна комуникација кога $M < N, T \geq M + N$ . . . . .	26
4.2	Заедничка информација на независно и еднакво распределени комплексни Гаусови сигнали . . . . .	27
4.3	Кодови заосновани врз основа на Грасмановото многуобразије за некохерентни MIMO системи . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Некохерентна комуникација кај MAC</b>	<b>30</b>
5.1	Модел на системот . . . . .	30
5.2	Некои резултати кои водат кон пресметка на заедничката информација . . . . .	31
5.2.1	Анализа на $h(\mathbf{Y})$ . . . . .	31
5.2.1.1	Пресметка на $p(\mathbf{Y})$ . . . . .	31
5.2.1.2	Пресметка на елементите на $\mathbf{F}$ . . . . .	35
5.2.2	Анализа на $h(\mathbf{Y} \mathbf{X})$ . . . . .	36
5.3	Примери и резултати од симулации . . . . .	39
5.4	Заклучок . . . . .	42
<b>6</b>	<b>"Pre - log" регион за MIMO "two-way" канал со реле</b>	<b>43</b>
6.1	Модел на системот . . . . .	43
6.2	Пресметка на $I(\mathbf{X}_A; \mathbf{Y} \mathbf{X}_B)$ и $I(\mathbf{X}_B; \mathbf{Y} \mathbf{X}_A)$ кога $M_A = M_B = M_R$ и $T \geq M_A + M_B$ . . . . .	46
6.2.1	Анализа на $h(\mathbf{Y}_B \mathbf{X}_B)$ . . . . .	46
6.2.2	Анализа на $h(\mathbf{Y}_B \mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B)$ . . . . .	47
6.2.3	Пресметка на $I(\mathbf{X}_A; \mathbf{Y} \mathbf{X}_B)$ . . . . .	48
6.2.4	"Pre-log" регион . . . . .	48
6.3	Пресметка на $I(\mathbf{X}_A; \mathbf{Y} \mathbf{X}_B)$ и $I(\mathbf{X}_B; \mathbf{Y} \mathbf{X}_A)$ кога $M_A \neq M_B$ , $M_R =$ $\max(M_A, M_B)$ и $T \geq M_A + M_B$ . . . . .	49
6.3.1	Анализа на $h(\mathbf{Y}_B \mathbf{X}_B)$ . . . . .	50
6.3.2	Анализа на $h(\mathbf{Y}_B \mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B)$ . . . . .	50
6.3.3	Пресметка на $I(\mathbf{X}_A; \mathbf{Y} \mathbf{X}_B)$ . . . . .	51
6.3.4	"Pre-log" регион . . . . .	51
<b>7</b>	<b>Заклучок</b>	<b>52</b>
	<b>Користена литература</b>	<b>54</b>

# Листа на слики

3.1	Комуникациски систем . . . . .	13
3.2	Регион на капацитетот кај МАС [1] . . . . .	16
3.3	МАС со $m$ корисници . . . . .	17
3.4	Канал со реле . . . . .	18
4.1	Капацитет при некохерентна комуникација кај "point-to-point" канал, кога $M = N$ и $T \geq 2M$ . . . . .	25
4.2	Капацитет при некохерентна комуникација кај "point-to-point" канал, кога $M < N$ и $T \geq M + N$ . . . . .	27
4.3	Заедничка информација при некохерентна комуникација кај "point- to-point" канал . . . . .	29
5.1	Условна ентропија при некохерентна комуникација кај МАС: $K=2$ , $N=4$ , $T=8$ . . . . .	40
5.2	Условна ентропија при некохерентна комуникација кај МАС: $K=4$ , $N=4$ , $T=8$ . . . . .	40
5.3	Условна ентропија при некохерентна комуникација кај МАС: $K=4$ , $N=4$ , $T=8$ . . . . .	41
5.4	Врската помеѓу условната ентропија и бројот на приемни антени . . . . .	41
6.1	"Two-way" канал со реле . . . . .	44
6.2	"Pre-log" регион за ММО "two-way" канал со реле . . . . .	49

# Симболи

$\det(\cdot)$	Детерминантата
$H(\cdot)$	Ентропија кај дискретна случајна променлива
$h(\cdot)$	Ентропија кај непрекината случајна променлива
$I(\cdot, \cdot)$	Зедничка информација
$C$	Капацитет на каналот
$\mathbb{E}[\cdot]$	Математичко очекување
$\mathcal{G}_{(\cdot, \cdot)}^{\mathbb{C}}$	Грасманово многуобразие
$\mathcal{S}_{(\cdot, \cdot)}^{\mathbb{C}}$	Штифелово многуобразие
$(\cdot)^{\mathbb{H}}$	Комплексна конјугација и транспонирано (Хермитов оператор)
$\Gamma(\cdot \cdot \cdot)$	Гама функција
$B(\cdot, \cdot)$	Бета функција

# Поглавје 1

## Вовед

Теоријата на случајни матрици наоѓа примена во голем број на области во физиката, статистиката и инженерството [2], [3]. Раните зачетоци на теоријата на случајни матрици потекнуваат од практични експериментални проблеми, а денес наоѓа примена во различни области вклучувајќи ги стохастичките диференцијални равенки, статистичка физика, хаотични системи, невронски мрежи, теорија на информации, процесирање на сигнали и “small-world” мрежи.

Фокусот на планираното истражување е во примената на техники и резултати од теоријата на случајни матрици во теоријата на информации и комуникациите. Некои од најновите резултати од оваа област покажуваат дека проблемите поврзани со распределбите на сопствените или сингуларните вредности на некои случајни матрици се поврзани со анализата на капацитетот на безжичните канали [4].

Што се однесува до комуникациските канали од интерес, ние ќе се задржиме на каналот со повеќекратен пристап ("Multiple-Access Channel") и каналот со реле ("Relay Channel"). Овие канали може да се сметаат како специјални случаи или основни градечки блокови на поопшти комуникациски мрежи.

Во последните неколку години посебен акцент се става на некохерентната безжична комуникација, термин што го опишува сценариото кога коефициентите на влијанието на каналот не се познати ниту за предавателот, ниту пак за приемникот. Во случај на фиксни безжични околина каде коефициентите на влијанието на каналот се менуваат доста бавно, предавателот може да праќа тренинг сигнали врз основа на кои приемникот може да изврши оценување на коефициентите на влијанието на каналот. Меѓутоа во случај на мобилни безжични околина каде коефициентите на влијанието на каналот се менуваат доста бргу, испраќањето на тренинг сигнали од страна на предавателот ги влошува перформансите на мрежата особено во системи



кои имаат голем број на антени. Во таквите ситуации има потреба од постоење на комуникациски стратегии кои не се потпираат на експлицитно оценување на коефициентите на влијанието на каналот, туку се засноваат на фундаменталното разбирање на основите на некохерентната комуникација.

Почетоците во некохерентната комуникација се поставени од страна на Marzetta и Hochwald кои работат на капацитетот на комуникациските канали со повеќе предавателни антени, во случај кога коефициентите на влијанието на каналот не се познати ниту за предавателот ниту за приемникот [5], [6]. Сметајќи дека каналот останува константен во траење од  $T$  симбол периоди пред да се промени во нова независна реализација, Marzetta и Hochwald покажуваат дека зголемувајќи го бројот на предавателни антени наспроти бројот на приемни антени не може да го зголеми капацитетот на каналот и истовремено го пресметуваат капацитетот на каналот во случај кога се има една предавателна и една приемна антена при висок однос на сигнал-шум (SNR).

Мотивирани од работата на Marzetta и Hochwald, Zheng и Tse успеваат да го пресметат капацитетот на каналите со повеќе предавателни и приемни антени ("MIMO channel") во режимот на висок однос сигнал-шум (SNR), кога предавателот има  $M$  предавателни антени, а приемникот има  $N$  приемни антени [7]. Дополнително, тие даваат геометриска интерпретација на проблемот, покажувајќи дека Грасмановите многуобразја се релевантните геометриски објекти за разбирање на проблемот и за изнаоѓање на соодветни комуникациски стратегии (кодирање)[8].

Целта на ова истражување ќе биде анализата на фундаменталните граници на преносот преку каналите со повеќекратен пристап (MAC) и каналот со реле. Ќе се задржиме на некохерентна безжична комуникација, применувајќи ја теоријата на случајни матрици.

## Поглавје 2

# Теорија на случајни матрици

Во ова поглавје ќе направиме краток преглед на некои позначјани математички резултати од теоријата на случајни матрици, кои се релевантни и ќе ни помогнат при определување на фундаменталните граници на некои безжични комуникациски мрежи [9].

### 2.1 Комплексни случајни вектори

Секој комплексен случаен вектор може да се запише во обликот:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_R + j\mathbf{x}_I, \quad (2.1)$$

каде  $\mathbf{x}_R$  и  $\mathbf{x}_I$  се реални случајни вектори. Во теоријата на безжични комуникации од посебен интерес се комплексни случајни вектори кои го имаат својството на кружна симетричност. Векторот  $\mathbf{x}$  е кружно симетричен вектор, ако за било кој агол  $\theta$ , векторот  $e^{j\theta}\mathbf{x}$  има иста распределба како и векторот  $\mathbf{x}$ . За секој кружно симетричен комплексен случаен вектор важи:

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}] = \mathbb{E}[e^{j\theta}\mathbf{x}] = e^{j\theta}\mathbb{E}[\mathbf{x}]. \quad (2.2)$$

Од овде следува дека средната вредност на кружно симетричен комплексен случаен вектор е 0 ( $\mu = 0$ ).

#### 2.1.1 Комплексни Гаусови случајни вектори

Во случај на комплексни Гаусови случајни вектори  $\mathbf{x}_R$  и  $\mathbf{x}_I$  се реални Гаусови случајни вектори. Доколку имаме  $n$  димензионален комплексен Гаусов случаен

вектор, тогаш неговиот реален и имагинарен дел формираат  $2n$  димензионален реален Гаусов случаен вектор. Распределбата на комплексниот Гаусов случаен вектор е опишана со среданата вредност ( $\boldsymbol{\mu}$ ) и коваријансната матрица ( $\mathbf{K}$ ) на реланиот Гаусов случаен вектор кој е образуван од неговиот реален и имагинарен дел.

Користејќи дека средната вредност на кружно симетричен вектор е 0, во случај на комплексен Гаусов случаен вектор следува дека коваријансната матрица ( $\mathbf{K}$ ) ја опишува целата статистиката. Кружно симетричен Гаусов случаен вектор со коваријансна матрица  $\mathbf{K}$  го бележиме како  $CN(0, \mathbf{K})$ . Некои поважни случаи:

**1.** Комплексниот Гаусов случаен вектор  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R + j\mathbf{x}_I$  е кружно симетричен, доколку неговиот реален и имагинарен дел се реални Гаусови случајни вектори со средна вредност 0. Комплексна случајна променлива велиме дека има стандардизирана Гаусова распределба  $CN(0, 1)$  доколку нејзиниот реален и имагинарен дел имаат средна вредност 0 и варијанса  $1/2$ .

**2.** Колекција од  $n$  независни случајни променливи кои имаат  $CN(0, 1)$  распределба формираат стандардизиран кружно симетричен Гаусов вектор кој се бележи како  $CN(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Густината на распределба на стандардизиран кружно симетричен вектор  $\mathbf{x}$  е дадена со следнава релација:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^n} \exp(-\|\mathbf{x}\|^2), \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \quad (2.3)$$

**3.** Ако  $\mathbf{x}$  е случаен вектор кој има  $CN(0, \mathbf{I})$  распределба и  $\mathbf{A}$  е случајна комплексна матрица, тогаш  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  е исто така кружно симетричен вектор со коваријансна матрица  $\mathbf{K} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$  т.е  $CN(0, \mathbf{K})$ . Од овде следува дека секој кружно симетричен Гаусов случаен вектор со коваријансна матрица  $\mathbf{K}$  може да се запише како линеарна комбинација од кружно симетричен стандардизиран Гаусов случаен вектор. Доколку постои инверзна матрица на матрицата  $\mathbf{A}$ , тогаш густината на распределбата на случајниот вектор  $\mathbf{y}$  е дадена со следната релација:

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{\pi^n \det \mathbf{K}} \exp(-\mathbf{y}^* \mathbf{K}^{-1} \mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Комплексни случајни вектори рамномерно распределени на единечна сфера

Една од техниките за генерирање на комплексен случаен вектор  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)'$  кој е рамномерен распределен на единечна сфера  $\mathbb{C}^n$  се сведува на следнава трансформација:

$$y_i = \frac{x_i}{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^{\frac{1}{2}}}, i = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

каде  $x_1, \dots, x_n$  се комплексни стандардизирани Гаусови случајни променливи.

## 2.2 Факторизација на матрици

Декомпозиција на матрица претставува факторизација на матрицата (производ од повеќе матрици). Постојат поголем број на можни декомпозиции кои може да се применат кај матриците во зависност од проблемите со кои се соочуваме.

### 2.2.1 SV декомпозиција

SV декомпозицијата е метод кој најчесто се користи за факторизација кај реални и комплексни матрици при решавање на голем број проблеми.

**Дефиниција 2.2.1:** Секоја  $m \times n$  матрица која има реални (или комплексни) елементи, со ранг  $r$  ( $r \leq p = \min\{m, n\}$ ) може да се запише како:

$$\mathbf{X}_{m \times n} = \mathbf{U}_{m \times m} \mathbf{\Sigma}_{m \times n} \mathbf{V}'_{n \times n} \quad (2.6)$$

каде  $\mathbf{U}$  е  $m \times m$  ортогонална (или унитарна) матрица,  $\mathbf{V}$  е  $n \times n$  ортогонална (или унитарна) матрица и  $\mathbf{\Sigma} = (\sigma_{ij})$  е  $m \times n$  матрица каде  $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \cdots \geq \sigma_{rr} > 0 = \sigma_{r+1, r+1} = \cdots = \sigma_{pp}$  и  $\sigma_{ij} = 0$  во случај кога  $i \neq j$ . Вредностите  $\sigma_i = \sigma_i(\mathbf{X})$  се нарекуваат сингуларни вредности на матрицата  $\mathbf{X}$ , кои се всушност позитивните вредности од квадратниот корен од сопствените вредности на  $\mathbf{X}\mathbf{X}'$ . Од овде доаѓа и името на самиот метод на декомпозиција, односно декомпозиција со помош на сингуларните вредности.

Колоните  $\mathbf{u}_i$  на матрицата  $\mathbf{U}$  се ортонормализирани десни сопствени вектори кои одговараат на  $\mathbf{X}\mathbf{X}'$ , додека колоните  $\mathbf{v}_i$  на матрицата  $\mathbf{V}$  се десни сопствени вектори кои одговараат на  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ . Од овде треба да се воочи дека  $\mathbf{X}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{X}'\mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), Векторите  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  уште се нарекуваат леви и десни сингуларни вектори кои одговараат на сингуларната вредност  $\sigma_i$ .

### 2.2.2 Триаголни факторизации

Секоја реална или комплексна матрица  $m \times n$ , под одредени услови може да се запише како  $\mathbf{X} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ , каде  $\mathbf{L}$  е долно-триаголна матрица, додека  $\mathbf{U}$  е горно-триаголна матрица. Ако  $m < n$ , тогаш  $\mathbf{L}$  е  $m \times m$  матрица, додека ако  $m > n$ , тогаш  $\mathbf{L}$  е  $m \times n$  матрица.

### 2.2.3 QR декомпозиција

Овој метод на декомпозиција врши факторизација на матрицата како производ од унитарна матрица и горно-триаголна матрица и наоѓа голема примена во анализа на регресиони модели.

**Дефиниција 2.2.2:** Секоја  $n \times p$  матрица  $\mathbf{X}$  од ранг  $r$  може да се запише како  $\mathbf{X} = \mathbf{QR}$ , каде  $\mathbf{Q}$  е  $n \times n$  унитарна матрица, додека  $\mathbf{R}$  е  $n \times p$  горно-триаголна матрица. Ако  $n \geq p$ , тогаш

$$\mathbf{QR} = (\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_{n-p})(\mathbf{R}_1, \mathbf{0})' = \mathbf{Q}_p \mathbf{R}_1, \quad (2.7)$$

каде  $\mathbf{Q}_p$  ги содржи првите  $p$  колони од  $\mathbf{Q}$ , додека  $\mathbf{R}_1$  е  $p \times p$  горно-триаголна матрица. Во случај кога  $n \leq p$ , вршиме замена на  $\mathbf{R}$  со  $(\mathbf{R}_2, \mathbf{S})$ , каде  $\mathbf{R}_2$  е  $n \times n$  горно-триаголна матрица.

Детерминантата на секоја несингуларна матрица  $\mathbf{X}_{n \times n}$  може да се претстави како

$$\det \mathbf{X} = \det \mathbf{Q} \cdot \det \mathbf{R}_1 = \prod_{i=1}^n r_{ii}, \quad (2.8)$$

каде  $\mathbf{R}_1 = (r_{ij})$ . Ова е доста корисен метод за определување на детерминантата на дадена матрица.

### 2.2.4 Спектрална декомпозиција

Нека  $\mathbf{X}$  е  $n \times n$  реална симетрична (или Хермитова) матрица. Тогаш постои ортогонална (или унитарна) матрица  $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n)$  т.ш

$$\mathbf{Q}' \mathbf{X} \mathbf{Q} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \mathbf{\Lambda}, \quad (2.9)$$

каде  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  се сопствени вредности на матрицата  $\mathbf{X}$ . Во случај кога  $\mathbf{X}$  е Хермитова матрица, тогаш  $\mathbf{Q}'$  се заменува со  $\mathbf{Q}^H$ . Од овде следува дека

$$\mathbf{X} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}' = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i' = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{F}_i, \quad (2.10)$$

каде  $\mathbf{F}_i$  се симетрични, идемпотентни и  $\mathbf{F}_i \mathbf{F}_j = 0$  во случај кога  $j \neq i$ . Ова декомпозиција уште е позната и како декопозиција со помош на сопствените вредности.

### 2.2.5 "Bartlett" декомпозиција и детерминанти на случајни матрици од рамномерен "Gramm" и "Wishart" ансамбли

Нека е дадена матрица  $\mathbf{X}$  која е  $m \times n$  матрица ( $n \leq m$ ) со комплексни елементи и  $\mathbf{X}^H$  е нејзината Хермитова матрица. Овде од интерес ја имаме  $\det(\mathbf{X}^H \mathbf{X})$ . Вектор колоните од матрицата  $\mathbf{X}$  се избираат независно од некоја заедничка распределба  $v_m$ . Во случај кога  $v_m = CN(0, I_m)$  го добиваме "Wishart" ансамбалот, а доколку  $v_m = \sigma_m$ , каде  $\sigma_m$  е рамномерна распределба на единечна сфера  $S^{m-1}$  го добиваме рамномерниот "Gramm" ансамбал. За детерминантата на  $n \times n$  симетрична позитивна матрица, може да се примени следниот метод на декомпозиција

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n \frac{\mathbf{A}^{[i]}}{\mathbf{A}^{[i-1]}}, \quad (2.11)$$

каде  $\mathbf{A}^{[i]}$  е горниот лев дел од матрицата  $\mathbf{A}$  со договор дека  $\det \mathbf{A}^{[0]} = 1$ .

Користејќи го овој метод на декомпозиција, "Bartlett" теоремите овозможуваат детерминантата на  $\mathbf{X}^H \mathbf{X}$  да се претстави како производ од независни случајни променливи кои се гама или бета распределени, во зависност од тоа какви се елементите на матрицата [10], [11], [12].

Доколку се примени QR декомпозиција на матрицата  $\mathbf{X}$  добиваме:

$$\det(\mathbf{X}^H \mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n R_{ii}^2. \quad (2.12)$$

**1) "Wishart" ансамбал:** Ако  $1 \leq n \leq m$ , случајните променливи  $R_{ii}^2$  се независни и имаат  $\chi_{m-(i-1)}^2$  распределба, односно "chi-square" распределба со  $m - (i - 1)$  степени на слобода.

**2) Рамномерен "Gramm" ансамбал:** Ако  $2 \leq n \leq m$ , случајните променливи  $R_{ii}^2$  се независни и имаат  $B(\beta'(m - i + 1), \beta'(i - 1))$  распределба, каде  $\beta' = \frac{\beta}{2}$ ,  $\beta = 1$  во случај кога  $\mathbf{X}$  е реална матрица, а  $\beta = 2$  во случај кога  $\mathbf{X}$  е комплексна матрица.

## 2.3 Јакобијани при факторизација на матрици

Факторизацијата на матрици е смена на координати. Оттаму се јавува потреба од дефинирање на Јакобијани на трансформациите. Со цел да ги проследиме Јакобијаните кои се добиваат при факторизација на матриците, мора да ги земаме во предвид сите можни случаи на матрици и тоа реални, комплексни и матрици чии елементи се квантерниони. За таа цел се јавува параметарот  $\beta$  од каде ја

добиваме оваа информација. Кога  $\beta = 1$  станува збор за реални матрици, кога  $\beta = 2$  станува збор за комплексни матрици, а кога  $\beta = 4$  станува збор за матрици чии елементи се квантерниони. Овде ќе ги проследиме Јакобијаните на некои методи за декомпозиција на матрици.

**1.SV декомпозиција.** Јакобијанот кој се добива во случајот на SV декомпозиција на дадена случајна матрица  $\mathbf{X}$  со димензии  $m \times n$  за сите вредности на параметарот  $\beta$  е следниот [13]:

$$(d\mathbf{X}) = \prod_{i < j} (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)^\beta \prod_{i=1}^n \sigma_i^{\beta(m-n+1)-1} (\mathbf{U}' d\mathbf{U})(d\mathbf{\Sigma})(\mathbf{V}' d\mathbf{V}) \quad (2.13)$$

**2.Триаголни факторизации.** Јакобијанот кој се добива во случајот на LU декомпозиција на дадена случајна матрица  $\mathbf{X}$  со димензии  $n \times n$  за сите вредности на параметарот  $\beta$  е следниот :

$$(d\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n |u_{ii}|^{\beta(n-i)} (d\mathbf{L})(d\mathbf{U}) \quad (2.14)$$

**3.QR декомпозиција.** Јакобијанот кој се добива во случајот на QR декомпозиција на дадена случајна матрица  $\mathbf{X}$  со димензии  $m \times n$  за сите вредности на параметарот  $\beta$  е следниот:

$$(d\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n r_i^{\beta(m-i+1)-1} (d\mathbf{R})(\mathbf{Q}' d\mathbf{Q}) \quad (2.15)$$

**4.Спектрална декомпозиција.** Јакобијанот кој се добива во случајот на спектрална декомпозиција на дадена случајна матрица  $\mathbf{X}$  со димензии  $n \times n$  за сите вредности на параметарот  $\beta$  е следниот:

$$(d\mathbf{X}) = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^\beta (d\mathbf{\Lambda})(\mathbf{Q}' d\mathbf{Q}) \quad (2.16)$$

## Поглавје 3

# Теорија на информации

Во ова поглавје ќе направиме краток преглед на некои делови од теорија на информации кои ќе ни помогнат при определување на фундаменталните граници на некои безжични комуникациски мрежи [1].

### 3.1 Ентропија

#### 3.1.1 Ентропија на дискретна случајна променлива

Ентропијата претставува мерка за неизвесноста на дадена случајна променлива [1]. Во случај кога  $X$  е дискретна случајна променлива со множество на вредности  $X_1$  и веројатност  $p(x) = P\{X = x\}, x \in X_1$ , тогаш нејзината ентропија може да се определи како:

$$H(X) = - \sum_{x \in X_1} p(x) \log_2 p(x) \quad (3.1)$$

Во зависност од основата на логаритмот со кој се пресметува ентропијата, се одредува и нејзината мерна единица. Доколку логаритмот е со основа два, единица мерка за ентропијата е бити, а доколку основата на логаритмот е  $e$  тогаш ентропијата се мери во нати.

Кога имаме дводимензионална случајна променлива, односно случаен вектор со заедничка распределба  $p(x, y)$ , тогаш здружената ентропија се пресметува како:

$$H(X, Y) = - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log_2 p(x, y) = \mathbb{E}[\log_2 p(X, Y)]. \quad (3.2)$$



Доколку имаме дводимензионален случаен вектор  $(X, Y)$  со заедничка распределба  $p(x, y)$ , тогаш условната ентропија се дефинира како:

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= \sum_{x \in X} p(x) H(Y|X = x) = - \sum_{x \in X} p(x) \sum_{y \in Y} p(y|x) \log_2 p(y|x) \\ &= \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log_2 p(y|x) = -\mathbb{E}[\log_2 p(Y|X)]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здружената ентропија на две случајни променливи е еднаква на збирот од ентропијата на едната случајна променлива и условната ентропија на другата случајна променлива:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X). \quad (3.4)$$

Откако ги дефиниравме ентропијата, заедничката ентропија и условната ентропија ќе го дефинираме и верижното правило, од каде имаме:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X). \quad (3.5)$$

Претходната релација следува од релацијата:

$$\log_2 p(x, y) = \log_2 p(x) + \log_2 p(y|x). \quad (3.6)$$

Во случај ако имаме  $X_1, X_2, \dots, X_n$  случајни променливи кои се избрани од  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , тогаш:

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n H(X_i | X_{i-1}, \dots, X_1) \quad (3.7)$$

Својства на ентропијата:

1.  $H(X) \geq 0$
2.  $H_b(X) = \log_b(a) H_a(X)$
3. Ако имаме две случајни променливи  $X$  и  $Y$ , тогаш:

$$H(X|Y) \leq H(X),$$

каде знакот за еднакво важи ако и само ако  $X$  и  $Y$  се независни случајни променливи.

### 3.1.2 Ентропија на непрекината случајна променлива

Во случај кога  $X$  е непрекината случајна променлива со функција на распределба  $F(x) = P(X \leq x)$  и густина на веројатноста  $f(x) = (F(x))'$ , тогаш нејзината ентропија може да се определи како:

$$h(X) = - \int_S f(x) \log_2 f(x) dx, \quad (3.8)$$

каде  $S$  е областа кај што важи распределбата на случајната променлива  $X$ . Доколку  $X$  е случајна променлива која има рамномерна распределба на интервалот  $(0, a)$ , тогаш нејзината ентропија е:

$$h(X) = \log a. \quad (3.9)$$

Доколку  $X$  е случајна променлива која има стандардизирана нормална распределба  $N(0, \sigma^2)$ , тогаш нејзината ентропија е:

$$h(X) = \frac{1}{2} \log 2\pi e \sigma^2. \quad (3.10)$$

Во случај ако имаме  $X_1, X_2, \dots, X_n$  случајни променливи кои се избрани од густина на веројатноста  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , тогаш нивната здружена ентропија е:

$$h(X_1, X_2, \dots, X_n) = - \int f(x^n) \log f(x^n) dx^n \quad (3.11)$$

Ако  $(X, Y)$  е дводимензионален случаен вектор со заедничка густина на веројатноста  $f(x, y)$ , тогаш условната ентропија се дефинира како:

$$h(X|Y) = - \int f(x, y) \log f(x|y) dx dy \quad (3.12)$$

Ако искористиме дека  $f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)}$ , тогаш претходната релација можеме да ја запишеме како:

$$h(X|Y) = h(X, Y) - h(Y). \quad (3.13)$$

Нека  $X_1, X_2, \dots, X_n$  се случајни променливи кои имаат повеќедимензионална нормална распределба со средна вредност  $\mu$  и коваријансна матрица  $K$ . Тогаш нивната заедничка ентропија е:

$$h(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{1}{2} \log(2\pi e)^n \det(K). \quad (3.14)$$

Својства на ентропијата:

1.  $h(X|Y) \leq h(X)$ .
2.  $h(aX) = h(X) + \log|a|$ .
3.  $h(X + c) = h(X)$ .
4.  $h(AX) = h(X) + \log|\det(A)|$ .

## 3.2 Заедничка информација

Заедничката информација е мерка за количеството на информација која едната случајна променлива ја содржи за другата случајна променлива [1]. Всушност таа

претставува намалување на неизвесноста на една случајна променлива врз основа на знаењето која го има за останатата.

### 3.2.1 Заедничка информација на дискретна случајна променлива

Нека  $X$  и  $Y$  се две дискретни случајни променливи со заеднички закон на распределба  $p(x, y)$  и маргинални закони на распределба  $p(x)$  и  $p(y)$ . Заедничката информација на овие две случајни променливи се дефинира како

$$I(X; Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log_2 \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} = \mathbb{E}_{p(x, y)} \log_2 \frac{p(X, Y)}{p(X)p(Y)}. \quad (3.15)$$

Од друга стана можеме да ја претставиме заедничката информација преку ентропиите на случајните променливи и тоа како:

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y); \quad (3.16)$$

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X); \quad (3.17)$$

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y); \quad (3.18)$$

$$I(X; Y) = I(Y; X); \quad (3.19)$$

$$I(X; X) = H(X). \quad (3.20)$$

Условна заедничка информација помеѓу случајната променлива  $X$  и случајната променлива  $Y$  при услов на случајната променлива  $Z$  се дефинира како

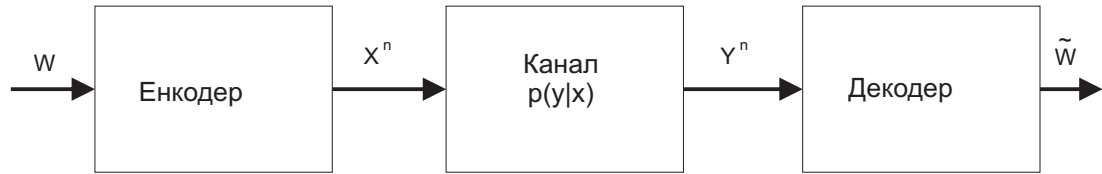
$$I(X; Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y, Z) = \mathbb{E}_{p(x, y, z)} \log_2 \frac{p(X, Y|Z)}{p(X|Z)p(Y|Z)}. \quad (3.21)$$

Заедничкава информација исто како и ентропијата го задоволува верижното правило, од каде следува

$$I(X_1, X_2, \dots, X_n; Y) = \sum_{i=1}^n I(X_i|Y|X_{i-1}, X_{i-2}, \dots, X_1). \quad (3.22)$$

Некои својства на заедничката информација:

1.  $I(X; Y) \geq 0$ , со знак за еднакво ако и само ако  $X$  и  $Y$  се независни случајни променливи.
2. Ако случајните променливи  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$  формираат Маркова верига, тогаш  $I(X; Y) \geq I(X; Z)$ .



Слика 3.1: Комуникациски систем

### 3.2.2 Заедничка информација на непрекинатата случајна променлива

Ако  $X$  и  $Y$  се непрекинати случајни променливи со заедничка густина на веројатноста  $f(x, y)$ , тогаш нивната заедничка информација е

$$I(X; Y) = \int f(x, y) \log_2 \frac{f(x, y)}{f(x)f(y)} dx dy. \quad (3.23)$$

Како и во случајот со дискретни случајни променливи, така и во случајот на непрекинати случајни променливи, нивната заедничка информација може да се претстави преку нивните ентропии:

$$I(X; Y) = h(X) - h(X|Y); \quad (3.24)$$

$$I(X; Y) = h(Y) - h(Y|X); \quad (3.25)$$

$$I(X; Y) = h(X) + h(Y) - h(X, Y). \quad (3.26)$$

## 3.3 Капацитет на каналот

Еден од најголемите проблеми со кои се соочува теоријата на информации е определување на капацитетот на каналот по кој се одвива комуникацијата [1]. За таа цел ќе разгледаме еден комуникациски систем кој е претставен на Слика 3.1.

**Дефиниција 3.3.1 :** Дискретен канал  $(\Psi, p(y|x), \Omega)$ , се состои од две конечни множества  $\Psi$  и  $\Omega$  и колекција од функции на веројатноста  $p(y|x)$ , така што за секое  $x \in \Psi$  и  $y \in \Omega$ ,  $p(y|x) \geq 0$  и за секое  $x$ ,  $\sum_y p(y|x) = 1$ .

**Дефиниција 3.3.2:** Еден  $(M, n)$  код за дискретен канал  $(\Psi, p(y|x), \Omega)$  се состои од:

1. Множество на индекси  $\{1, 2, \dots, M\}$ .
2. Функција за енкодирање  $X^n : \{1, 2, \dots, M\} \rightarrow \Psi^n$  која ги создава кодните зборови  $x^n(1), x^n(2), \dots, x^n(M)$ . Множеството од сите кодни зборови се нарекува кодна книга.

3. Функција за декодирање,  $g : \Omega^n \rightarrow 1, 2, \dots, M$  која всушност претставува детерминистичко правило кое погодува кој е примениот вектор.

**Дефиниција 3.3.3:** Условна веројатност за настаната грешка кога индексот  $i$  е испратен се дефинира како

$$\lambda_i = Pr(g(Y^n) \neq i | X^n = x(i)) = \sum_{y^n} p(y^n | x^n(i)) I(g(y^n) \neq i). \quad (3.27)$$

$I(\cdot)$  е индикатор функција.

**Дефиниција 3.3.4:** За  $(M, n)$  код, максималната веројатност за грешка  $\lambda^{(n)}$  се дефинира како

$$\lambda^{(n)} = \max_{i \in \{1, 2, \dots, M\}} \lambda_i. \quad (3.28)$$

**Дефиниција 3.3.5:** За  $(M, n)$  код, средната веројатност за грешка  $Pe^{(n)}$  се дефинира како

$$Pe^{(n)} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \lambda_i. \quad (3.29)$$

**Дефиниција 3.3.6:** Соодветната рата за  $(M, n)$  код се дефинира како

$$R = \frac{\log M}{n} \quad \text{bits per transmission.} \quad (3.30)$$

**Дефиниција 3.3.7:** Ратата  $R$  се нарекува достижна ако постои секвенца од  $(2^{nR}, n)$  кодови за кои максималната веројатност за грешка  $\lambda^{(n)}$  се стреми кон 0, кога  $n \rightarrow \infty$ .

**Дефиниција 3.5.8:** Капацитетот на каналот претставува супремум од сите достижни рати.

$$C = \sup_{p(x)} I(X; Y). \quad (3.31)$$

### 3.3.1 Својства на капацитетот на каналот

1.  $C \geq 0$ , бидејќи  $I(X; Y) \geq 0$ .
2.  $C \leq \log |\Psi|$ , бидејќи  $C = \max I(X; Y) \leq \max H(X) = \log |\Psi|$ .
3.  $C \leq \log |\Omega|$ , бидејќи  $C = \max I(X; Y) \leq \max H(Y) = \log |\Omega|$ .
4.  $I(X; Y)$  е непрекината функција од  $p(x)$ .
5.  $I(X; Y)$  е конкавна функција од  $p(x)$ , од каде следува дека локалниот максимум е истовремено и глобален максимум. Водејќи се од својствата 2 и 3, следува дека максимумот е конечен, па затоа го користиме терминот максимум наместо супремум во дефиницијата на капацитетот.

### 3.4 Multiple Access Channel-МАС

Еден од каналите кои ни се од интерес претставува "Multiple Access Channel - МАС", кај кого двајца (или повеќе) корисници испраќаат информации на еден заеднички приемник. Пример за ваков канал претставува приемникот кај сателит кој има повеќе земјени станици. Стандарден вовед за МАС е даден во [1].

**Дефиниција 3.4.1:** Дискретен МАС се состои од три множества и тоа,  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  и  $\Omega$ , како и матрица од веројатностите на премин  $p(y|x_1, x_2)$ .

**Дефиниција 3.4.2:** Секој код  $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$  за МАС се состои од две множества на цели броеви  $W_1 = \{1, 2, \dots, 2^{nR_1}\}$  и  $W_2 = \{1, 2, \dots, 2^{nR_2}\}$ , кои се нарекуваат множествата на пораки, две функции за енкодирање,  $X_1 : W_1 \rightarrow \Psi_1^n$  и  $X_2 : W_2 \rightarrow \Psi_2^n$ , и една функција за декодирање,  $g : \Omega^n \rightarrow W_1 \times W_2$ .

Во случајот на МАС со два корисници, првиот корисник кој испраќа рамномерно, избира еден индекс од множеството  $W_1$  и го испраќа соодветниот коден збор преку каналот. Вториот корисник го прави истото, меѓутоа тој рамномерно избира еден индекс од множеството  $W_2$  и го испраќа преку каналот. Под претпоставка дека распределбата на пораките над множеството  $W_1 \times W_2$  е рамномерна, тогаш средната веројатност за грешка за  $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$  кодот се дефинира како:

$$P_e^{(n)} = \frac{1}{2^{n(R_1+R_2-2)}} \sum_{(w_1, w_2) \in W_1 \times W_2} Pr\{g(Y^n) \neq (w_1, w_2) | (w_1, w_2) \text{ sent}\}. \quad (3.32)$$

**Дефиниција 3.4.3:** Парот од рати  $(R_1, R_2)$  се нарекува достиген за МАС, доколку постои секвенца од  $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$  кодови со  $P_e^{(n)} \rightarrow 0$ .

**Дефиниција 3.4.4:** Регионот на капацитетот за МАС претставува затворена област од сите достижни парови од рати  $(R_1, R_2)$ .

Капацитетот на МАС,  $(\Psi_1 \times \Psi_2, p(y|x_1, x_2), \Omega)$ , претставува затворена област од сите парови  $(R_1, R_2)$  кои задоволуваат

$$R_1 < I(X_1; Y | X_2), \quad (3.33)$$

$$R_2 < I(X_2; Y | X_1), \quad (3.34)$$

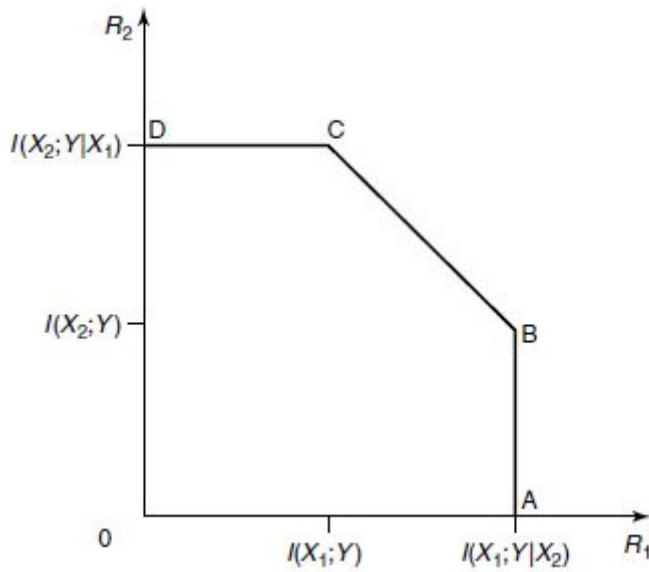
$$R_1 + R_2 < I(X_1, X_2; Y), \quad (3.35)$$

за секој производ  $p_1(x_1)p_2(x_2)$  на  $\Psi_1 \times \Psi_2$ .

Регионот за МАС е претставен на Слика 3.2.

Точката А од Слика 3.2 одговара на максималната рата со која првиот корисник испраќа до приемникот кога вториот корисник не испраќа информација. Односно имаме

$$\max R_1 = \max_{p_1(x_1)p_2(x_2)} I(X_1; Y | X_2). \quad (3.36)$$



Слика 3.2: Регион на капацитетот кај MAC [1]

За било кој производ  $p_1(x_1)p_2(x_2)$ ,

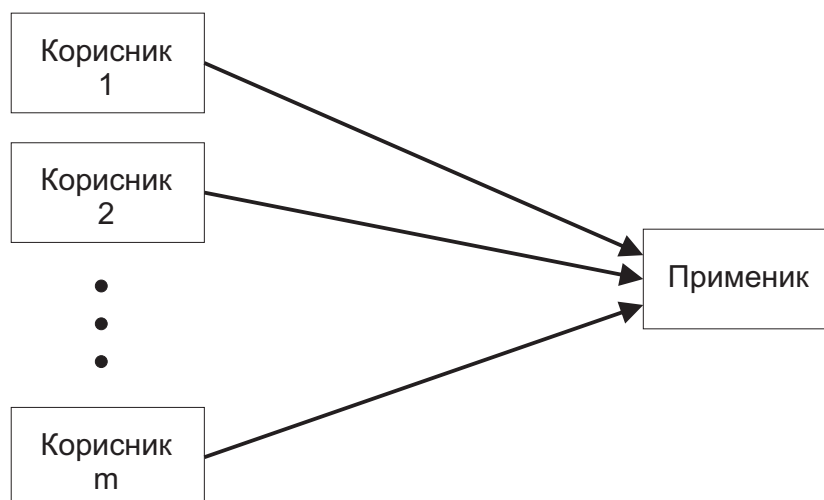
$$I(X_1; Y|X_2) = \sum_{x_2} p_2(x_2) I(X_1; Y|X_2 = x_2) \leq \max_{x_2} I(X_1; Y|X_2 = x_2), \quad (3.37)$$

бидејќи средната вредност е помала од максималната.

Точката В одговара на максималната рата со која вториот корисник може да испраќа ако истовремено и првиот корисник испраќа со неговата максимална рата. Вусшност оваа рата се добива кога  $X_1$  се смета за шум во каналот од  $X_2$  до  $Y$ . Во овој случај ако го искористиме резултатот од канал со еден корисник,  $X_2$  може да испраќа со рата  $I(X_2; Y)$ . Во ваков случај приемникот знае кој коден збор од сите можни кодни зборови на  $X_2$  е искористен и може да го одземе неговиот ефект од каналот. Потоа може да сметаме дека каналот е индексирано множество од канали со еден корисник, каде што индексот е  $X_2$  симболот кој е искористен. Во овој случај ратата која ја достигнува  $X_1$  е средна заедничка информација, каде усреднувањето е по сите канали и секој канал се појавува онолку пати колку што и соодветниот  $X_2$  симбол се појавува во кодниот збор. Ратата која се достигнува е

$$\sum_{x_2} p(x_2) I(X_1; Y|X_2 = x_2) = I(X_1; Y|X_2). \quad (3.38)$$

Точките С и D одговараат на В и А соодветно, доколку првиот и вториот корисник се ги сменат улогите.

Слика 3.3: MAC со  $m$  корисници

### 3.4.1 MAC со $m$ - корисници

MAC со  $m$  - корисници е всушност генерализиран случај на MAC со два корисници кога  $m \geq 2$ . Кодовите, ратите и достигнувањата на ратите се дефинира на ист начин како и кај MAC со два корисници.

Нека  $S \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$  и со  $S^c$  го означуваме комплиментот на  $S$ . Нека  $R(S) = \sum_{i \in S} R_i$  и нека  $X(S) = \{X_i : i \in S\}$ . Тогаш регионот на капацитетот на MAC со  $m$ -корисници е затворена област од векторите на ратите кои го задоволуваат следниот услов

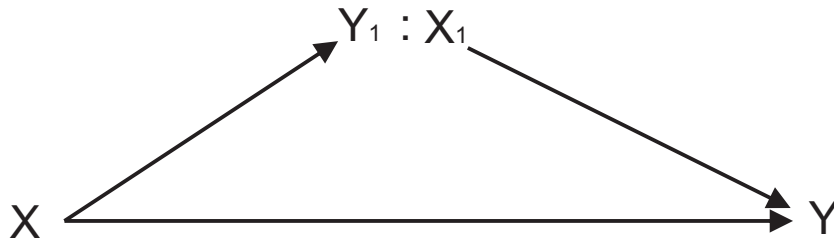
$$R(S) \leq I(X(S); Y | X(S^c)), \quad (3.39)$$

за сите  $S \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$  и за некои производи од распределби  $p_1(x_1)p_2(x_2) \dots p_m(x_m)$ . Ваков канал е претставен на Слика 3.3.

## 3.5 Канал со реле

Каналот со реле е канал кај кој има еден корисник кој испраќа и еден применик со одреден број на посредни јазли кои се однесуваат како релеа и им помагаат при комуникацијата на корисникот кој испраќа и приемникот. Наједноставниот модел на канал со реле е оној во кој помеѓу корисникот кој испраќа и приемникот има само еден посреден јазол кој се однесува како реле. Каналот со реле претставува комбинација на "broadcast channel - BC" канал и MAC канал. Секој канал со реле содржи четири конечни множества  $\Psi, \Psi_1, \Omega, \Omega_1$  и колекција на функции на





Слика 3.4: Канал со реле

веројатноста  $p(y, y_1|x, x_1)$  дефинирани на  $\Omega \times \Omega_1$ , така што секоја од нив одговара на еден пар  $(x_1, x_2) \in \Psi \times \Psi_1$ . На Слика 3.4 е претставен канал со реле, од каде  $x$  е испратениот сигнал или влезот низ каналот,  $y$  е излезот од каналот,  $x_1$  е влезниот симбол кој е избран од страна на релето и  $y_1$  е она што го прима релето. Проблемот кој се појавува овде е да се определи капацитетот на каналот помеѓу корисникот кој испраќа  $X$  и применикот  $Y$ .

Каналот со реле е комбинација од BC ( $X$  до  $Y$  и  $Y_1$ ) и MAC ( $X$  и  $X_1$  до  $Y$ ).

**Дефиниција 3.5.1:** За каналот со реле,  $(2^{nR}, n)$  кодот се состои од множество на цели борови  $W = \{1, 2, \dots, 2^{nR}\}$ , функција за енкодирање,  $X : \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \Psi^n$ , множество од функции на релето,  $\{f_i\}_{i=1}^n$ , така што  $x_{1i} = f_i(Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1i-1})$ , кога  $i \leq i \leq n$ , и функција за декодирање,  $g : \Omega^n \rightarrow \{1, 2, \dots, 2^{nR}\}$ .

Условната веројатност за грешка доколку е испратено  $w \in [1, 2^{nR}]$ , се дефинира како

$$\lambda(w) = Pr\{g(Y) \neq w | w \text{ sent}\}. \quad (3.40)$$

Средната веројатност за грешка се дефинира како

$$P_e^{(n)} = \frac{1}{2^{nR}} \sum_w \lambda(w). \quad (3.41)$$

За каналот со реле, ратата  $R$  се нарекува достижна ако постои секвенца од  $(2^{nR}, n)$  кодови со  $P_e^{(n)} \rightarrow 0$ . За секој канал со реле  $(\Psi \times \Psi_1, p(y, y_1|x, x_1), \Omega \times \Omega_1)$ , капацитетот на каналот  $C$  е ограничен со

$$C \leq \sup_{p(x, x_1)} \min\{I(X, X_1; Y), I(X; Y, Y_1|X_1)\}. \quad (3.42)$$

Првиот член овде претставува горна граница на максималната рата со која  $X$  и  $X_1$  испраќаат до приемникот  $Y$ , додека вториот член е горна граница за ратата со која  $X$  испраќа до  $Y$  и  $Y_1$ .

## Поглавје 4

# Преглед на некохерентна комуникација

Познато е дека кај комуникациски систем кај кој предавателот и приемникот имаат по една антена и притоа е присутен бел Гаусов шум, капацитетот на каналот при висок однос на сигнал-шум (SNR) се зголемува за 1 b/s/Hz со секое зголемување на SNR за 3dB. Во случајот на "Multiple-Input and Multiple-Output - MIMO" односно кога предавателот има  $M$  антени, а приемникот има  $N$  антени и независни и идентично распределени Рејлиеви коефициенти на влијанието на каналот помеѓу сите парови на антени, добивката која се добива кај капацитетот е  $\min\{M, N\}$  при секое зголемување на SNR за 3dB. Параметарот  $\min\{M, N\}$  се нарекува број на степени на слобода за секунда за херц и е еден од клучните фактори за определување на перформансите на комуникацијата.

Погоре презентираниите резултати се добиени под претпоставка дека коефициентите на влијанието на каналот се познати од страна на приемникот. Затоа велиме дека станува збор за кохерентна комуникација. Во случајот на фиксни безжични околии каде коефициентите на влијанието на каналот се менуваат доста бавно, му се овозможува на предавателот периодично да испраќа тренинг сигнали со што ќе му овозможи на приемникот да изврши оценка за истите. Меѓутоа во случај на мобилни безжични околии каде коефициентите на влијанието на каналот се менуваат доста бргу, постапката со праќање на тренинг сигнали не може да се искористи и самата нивна оценка е всушност невозможна да се направи особено во системи со голем број на антени. Проблемите со кои се соочуваме овде е недостатокот на време за вистински точно да се оценат коефициентите на влијанието на каналот, и бидејќи времето на испраќањето на тренинг сигналите не е занемрливо мало ги нарушува перформансите на мрежата. Од овде потекнува и потребата за дизајнирање на комуникациски

шеми каде нема да се врши оценување на коефициентите на влијанието на каналот, односно потреба од разбирање на нешто кое се нарекува некохерентна комуникација. Истражувањето на некохерентната комуникација започнува од страна на Marzetta и Hochwald, кои успеваат да го добијат капацитетот на "point-to-point" канал во случај кога применикот и предавателот имаат по една антена [5], [6]. Тие капацитетот на каналот го добиваат преку директна анализа на интегралите кои се присутни при определување на заедничката информација, меѓутоа како техника не можело да се генерализира во случај на MIMO "point-to-point" канал.

## 4.1 Комуникација преку Грасманови многуобразија. Капацитет на "point-to-point" MIMO канал при некохерентна комуникација

Мотивирани од работата на Marzetta и Hochwald, Zheng и Tse го определуваат капацитетот на point-to-point MIMO канал при некохерентна комуникација, ставајќи акцент на режимот на висок однос сигнал-шум [7]. Моделот кој го разгледуваат е истиот кој е разгледуван од страна на Marzetta и Hochwald односно сметаат дека коефициентите на влијанието на каналот се независни и идентично Рејли распределни и остануваат константни за  $T$  симболи пред да се променат во нова реализација. За разлика од Marzetta и Hochwald кои со помош на техниките за интегрирање успеваат да го определат капацитетот во случај кога предавателот и применикот имаат по една антена и при високи вредности на SNR, во случајот на MIMO, Zheng и Tse воведуваат геометриски пристап со трансформација на проблемот во нов координатен систем, во кој истиот проблем ќе биде полесно решен.

### 4.1.1 Модел на системот

Zheng и Tse го разгледуваат моделот така што сметаат дека предавателот има  $M$  антени, а приемникот има  $N$  антени со независни и идентично распределени Гаусови шумови на секоја од приемните антени. Коефициентите на влијанието на каналот формираат  $N \times M$  случајна матрица, и се непознати како за предавателот така и за приемникот. Исто така сметаат дека коефициентите остануваат константни за  $T$  симболи и се менуваат во нова реализација во наредниот период. Главната карактеристика на овој модел е дека каналот останува константен само за конечно времетраење, па и од тука времето  $T$  е познато како кохерентно време. Бидејќи кохерентните интервали се независни меѓу себе, со цел да го добијат капацитетот на каналот, доволно е да се определи каналот само во еден кохерентен интервал.

Во тој интервал секоја предавателна антена испраќа  $T$  димензионален вектор, а секоја примена антена прима  $T$  димензионален вектор. Односно системот може да се запише како:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{W}, \quad (4.1)$$

каде  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{M \times T}$  и секоја вектор редица  $\mathbf{x}_i$  за  $i = 1, \dots, M$  е сигналот кој се испраќа од  $i$ -тата предавателна антена,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{N \times T}$  и секоја вектор редица  $\mathbf{y}_j$  за  $j = 1, \dots, N$  е сигналот кој се прима на  $j$ -тата приемна антена. Матрицата  $\mathbf{H}$  е случајна матрица во која фигурираат коефициентите на влијанието на каналот, од каде пропагациите помеѓу  $j$ -тата предавателна и  $i$ -тата приемна антена се независни и еднакво распределни со комплексна Гаусова распределба  $CN(0, 1)$  и густина на веројатноста:

$$p(\mathbf{h}_{ij}) = \frac{1}{\pi} \exp\{-|\mathbf{h}_{ij}|^2\}. \quad (4.2)$$

Матрицата  $\mathbf{W}$  е шумот кој е присутен и е претставена од независни еднакво распределени елементи кои имаат комплексна Гаусова распределба,  $CN(0, \sigma^2)$ .

Притоа се прави нормализација на моделот на комуникацискиот систем така што средната моќ на пренесување на секоја предавателна антена во еден симбол период е 1:

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^T |\mathbf{x}_{it}|^2 \right] = MT. \quad (4.3)$$

Основниот проблем со кои се занимаваат е определување на капацитетот на каналот, односно

$$C_{M,N} = \frac{1}{T} \sup_{p_x(\cdot)} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}), \quad (4.4)$$

каде што оптимизацијата се врши по сите распределби за  $\mathbf{X}$  кои ја задоволуваат релацијата (4.3).

#### 4.1.2 Некои познати резултати

Во случај на MIMO канал кај кој приемникот ја знае матрицата  $\mathbf{H}$ , односно ги знае коефициентите на влијанието на каналот, капацитетот во случај на  $M$  предавателни и  $N$  приемни антени се пресметува како

$$\begin{aligned} C_{coherent}(SNR) &= \mathbb{E} \left[ \log_2 \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{SNR}{M} \mathbf{H}\mathbf{H}^H \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \log_2 \det \left( \mathbf{I}_M + \frac{SNR}{M} \mathbf{H}^H \mathbf{H} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Во случај кога  $M = N$ , за висок однос на SNR се добива:

$$C_{coherent}(SNR) = M \log_2 \frac{SNR}{M} + \sum_{i=1}^M \mathbb{E}[\log_2 \chi_{2i}^2] + o(1). \quad (4.6)$$

Капацитетот при некохерентна комуникација кој може да се постигне кога бројот на предавателни антени е поголем од кохерентното време  $M > T$ , за било која вредност на кохерентното време и било која вредност на бројот на приемни антени, истиот може да се постигне и во случајот кога бројот на предавателни антени е еднаков со бројот на приемни антени,  $M = T$ .

Дадена случајна матрица  $R \in \mathbb{C}^{M \times T}$  се нарекува изотропно дистрибуирана ако нејзината распределба е непроменлива при ротација, односно при множење со унитарна матрица од десно:

$$p(\mathbf{R}) = p(\mathbf{R}Q), \quad (4.7)$$

за било која детерминистичка унитарна матрица  $Q$  со димензија  $T \times T$ .

Ако  $\mathbf{H}$  е изотропна дистрибуирана матрица и  $\mathbf{Q}$  е случајна унитарна матрица која е независна од  $\mathbf{H}$ , тогаш и  $\mathbf{H}\mathbf{Q}$  е независна од  $\mathbf{Q}$ .

### 4.1.3 Штифелови и Грасманови многуобразија

Геометријата која е релевантна на проблемите со кои се соочува некохерентната комуникација се Штифеловите и Грасмановите многуобразија [14].

**Дефиниција 4.3.1:** Штифелово многуобразие  $\mathcal{S}_{T,M}^{\mathbb{C}}$  кога  $T \geq M$  се дефинира како множество од сите  $M \times T$  унитарни матрици,

$$\mathcal{S}_{T,M}^{\mathbb{C}} = \{Q \in \mathbb{C}^{M \times T} : QQ^H = I_M\}.$$

Волуменот на Штифеловото многуобразие се дефинира како:

$$|\mathcal{S}_{T,M}^{\mathbb{C}}| = \prod_{i=T_M+1}^T \frac{2\pi^i}{(i-1)!}. \quad (4.8)$$

Два елемента кои припаѓаат на Штифеловото многуобразие се вели дека се еквивалентни ако нивните вектор редици опфаќаат ист потпростор.

**Дефиниција 4.3.2:** Грасмановото многуобразие,  $\mathcal{G}_{T,M}^{\mathbb{C}}$ , се дефинира како количник простор од Штифеловото многуобразие,  $\mathcal{S}_{T,M}^{\mathbb{C}}$ , односно  $\mathcal{G}_{T,M}^{\mathbb{C}}$  е множество од сите

$M$ - димензионални потпростори од  $\mathbb{C}^T$ .

Волуменот на Грасмановото многуобразие  $\mathcal{G}_{T,M}^{\mathbb{C}}$  се пресметува како:

$$|\mathcal{G}_{T,M}^{\mathbb{C}}| = \frac{|\mathcal{S}_{T,M}^{\mathbb{C}}|}{|\mathcal{S}_{M,M}^{\mathbb{C}}|} = \frac{\prod_{i=T-M+1}^T \frac{2\pi^i}{(i-1)!}}{\prod_{i=1}^M \frac{2\pi^i}{(i-1)!}}. \quad (4.9)$$

Димензијата (комплексно) на Грасмановото многуобразие,  $\mathcal{G}_{T,M}^{\mathbb{C}}$ , е следнава

$$\dim(\mathcal{G}_{T,M}^{\mathbb{C}}) = \dim(\mathcal{S}_{T,M}^{\mathbb{C}}) - \dim(\mathcal{S}_{M,M}^{\mathbb{C}}) = M(T - M). \quad (4.10)$$

#### 4.1.4 Некохерентна комуникација кога $M = N, T \geq 2M$

За да се определи капацитетот на MIMO "point-to-point" канал, Zheng и Tse предлагаат користење на нов координатен систем. Секоја  $M \times T$  матрица  $R$ , каде  $T \geq M$ , може да се претстави како потпросторот  $\Omega_R$  кој го опфаќаат нејзините вектор редици ( $\Omega_R \in G(T, M)$ ), заедно со  $M \times M$  матрица  $C_R$  која ги претставува вектор редиците од  $R$  во зависност од базата во  $\Omega_R$ . Оваа трансформација

$$R \rightarrow (C_R, \Omega_R), \quad (4.11)$$

всушност претставува промена на координатниот систем  $\mathbb{C}^{M \times T} \rightarrow \mathbb{C}^{M \times M} \times \mathcal{G}_{T,M}^{\mathbb{C}}$ .

Со цел да се разбере воведувањето на нов координатен систем, Zheng и Tse најпрво сметаат дека каналот е без Гаусов шум и  $\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X}$ . Во овој случај вектор редиците на  $\mathbf{Y}$  опфаќаат ист потпростор како и оние на  $\mathbf{X}$ , односно од овде следува дека матрицата на каналот  $\mathbf{H}$  влијае врз  $\mathbf{X}$  така што ја менува  $\mathbf{C}_{\mathbf{X}}$ , без да изврши промена на потпросторот  $\Omega_{\mathbf{X}}$ . Во случај кога е присутен Гаусов шум, истиот влијае врз потпросторот  $\Omega_{\mathbf{X}}$ , додека  $\mathbf{C}_{\mathbf{X}}$  е променета под дејство и на матрицата на каналот и на присуството на шумот. Меѓутоа при висок однос на SNR, случајноста на  $\mathbf{C}_{\mathbf{X}}$  потекнува од влијанието на каналот, па со користење на новиот координатен систем всушност се разделува влијанието на каналот од шумот.

Нека  $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{M \times T}$  е изотропно дистрибуирана случајна матрица и  $M \geq T$ . При промена на координатниот систем, ентропијата на случајната матрица  $\mathbf{R}$  можеме да ја пресметаме како

$$h(\mathbf{R}) = h(\mathbf{C}_{\mathbf{R}}) + \log |\mathcal{G}_{T,M}^{\mathbb{C}}| + (T - M)\mathbb{E} [\log \det \mathbf{R}\mathbf{R}^H], \quad (4.12)$$

каде  $|\mathcal{G}_{T,M}^{\mathbb{C}}|$  е волуменот на Грасмановото многуобразие.

Со цел да се определи капацитетот на каналот потребно е да се определи заедничката информација и да се определи оптималната влезна распределба која ќе ја максимизира заедничката информација.

Сметајќи го погоре опишаниот модел на комуникацискиот систем и можноста матрицата на предавателот да се запише како  $\mathbf{X} = \mathbf{A}\Theta$ , каде  $\mathbf{A} = \text{diag}(|\mathbf{x}_i| : i = 1, \dots, M)$  која ги содржи нормите на векторите кои се пренесуваат од секоја предавателна антена, а  $\Theta$  е изотропно дистрибуирана унитарна матрица која е независна од матрицата  $\mathbf{A}$ , заедничката информација може да се претстави како:

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{Y}|\mathbf{X}). \quad (4.13)$$

За дадена  $\mathbf{X}$  следува дека  $\mathbf{Y}$  има Гаусова распределба. Вектор редиците на  $\mathbf{Y}$  се независни една од друга и имаат заедничка коваријансна матрица

$$K_{\mathbf{y}_i} = \mathbf{X}^H \mathbf{X} + \sigma^2 \mathbf{I}_T,$$

од каде за условната ентропија се добива

$$h(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = M\mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^M \log \pi e (|\mathbf{x}_i|^2 + \sigma^2) \right] + M(T - M) \log \pi e \sigma^2. \quad (4.14)$$

Пред да се определи  $h(\mathbf{Y})$ , Zheng и Tse најпрво ја опишуваат оптималната влезна распределба. Нека  $\mathbf{x}_i^{(\sigma)}$ ,  $i = 1, \dots, M$  се оптималните влезни сингали на секоја антена со присуство на шум  $\sigma^2$ . Ако  $T \geq 2M$ , тогаш  $\frac{|\mathbf{x}_i|^2}{\sigma^2} \xrightarrow{P} \infty$ , каде настанува конвергенција во однос на веројатноста кога  $\sigma^2 \rightarrow 0$ .

Искористувајќи дека  $|\mathbf{x}_i|^2 \gg \sigma^2$ , за  $i = 1, \dots, M$ , за условната ентропија се добива:

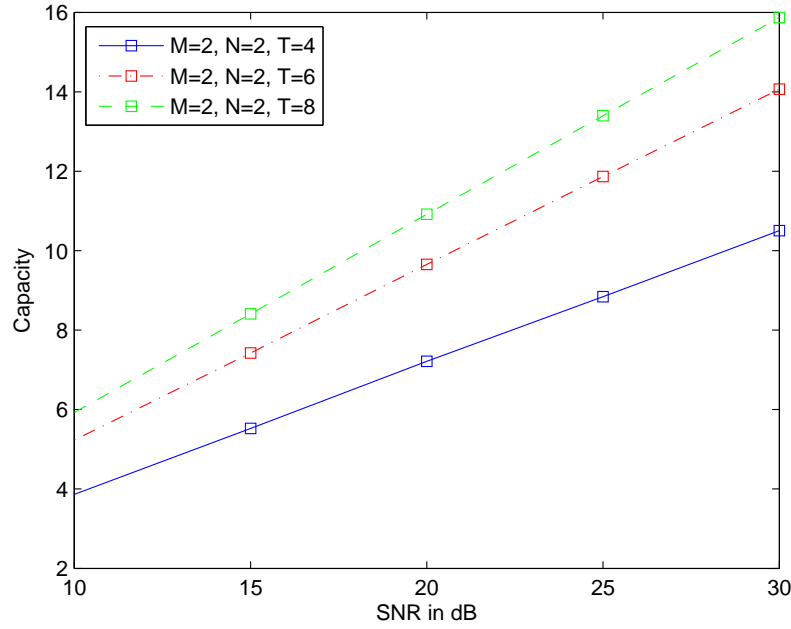
$$h(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = M\mathbb{E} [\log \det \mathbf{A}^2] + M^2 \log \pi e + M(M - T) \log \pi e \sigma^2. \quad (4.15)$$

Со цел да ја пресметат  $h(\mathbf{Y})$ , Zheng и Tse најпрво ја прават следната апроксимација

$$h(\mathbf{Y}) \approx h(\mathbf{H}\mathbf{X}).$$

Искористувајќи дека  $\mathbf{H}\mathbf{X}$  е изотропна дистрибуирана матрица и дека за даден  $\Omega_x$ ,  $\mathbf{C}_{\mathbf{H}\mathbf{X}}$  има иста распределба како и  $\mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ , каде  $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  е изотропно дистрибуирана унитарна матрица и независна од  $\mathbf{H}\mathbf{A}$ , за  $h(\mathbf{H}\mathbf{X})$  се добива

$$\begin{aligned} h(\mathbf{H}\mathbf{X}) &= h(\mathbf{C}_{\mathbf{H}\mathbf{X}}) + \log |\mathcal{G}_{T,M}^{\mathbb{C}}| + (T - M)\mathbb{E} [\log \det(\mathbf{H}\mathbf{A}^2\mathbf{H}^H)] \\ &= h(\mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{Q}) + \log |\mathcal{G}_{T,M}^{\mathbb{C}}| + (T - M)\mathbb{E} [\log \det \mathbf{A}^2] + (T - M)\mathbb{E} [\log \det \mathbf{H}\mathbf{H}^H]. \end{aligned} \quad (4.16)$$



Слика 4.1: Капацитет при некохерентна комуникација кај "point-to-point" канал, кога  $M = N$  и  $T \geq 2M$

Комбинирајќи ги изразите за  $h(\mathbf{Y})$  и  $h(\mathbf{Y}|\mathbf{X})$ , за заедничката информација се добива

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \approx \log |\mathcal{G}_{T,M}^{\mathbb{C}}| + (T - M)\mathbb{E} [\log \det \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathbb{H}}] - M(T - M) \log \pi e \sigma^2 - M^2 \log \pi e + h(\mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{Q}) + (T - 2M)\mathbb{E} [\log \det \mathbf{A}^2]. \quad (4.17)$$

Анализирајќи ја заедничката информација, Zheng и Tse ја добиваат и релацијата за капацитетот на MIMO "point-to-point" канал во случај на висок однос на SNR, кога  $M = N$  и  $T \geq 2M$ , односно

$$C_{M,M}(SNR) = M \left(1 - \frac{M}{T}\right) \log_2 SNR + \frac{1}{T} \log_2 |\mathcal{G}_{T,M}^{\mathbb{C}}| + M \left(1 - \frac{M}{T}\right) \log_2 \frac{T}{M\pi e} + \left(1 - \frac{M}{T}\right) \mathbb{E} [\log_2 \det \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathbb{H}}], \quad (4.18)$$

каде

$$\mathbb{E} [\log \det \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathbb{H}}] = \sum_{i=1}^M \mathbb{E} [\log \chi_{2i}^2]. \quad (4.19)$$

Од овде тие доаѓаат до заклучок дека на секое нараснување на SNR за 3dB, капацитетот се зголемува за  $M \left(1 - \frac{M}{T}\right)$  b/s/Hz, кои всушност претставуваат и степените на слобода.

На Слика 4.1 е претставен капацитетот на MIMO "point-to-point" канал за различни вредности на  $M$  и  $T$ , во случај кога  $M = N$  и  $T \geq 2M$ .



#### 4.1.5 Некохерентна комуникација кога $M < N, T \geq M + N$

Еден од поважните случаи е кога бројот на предавателни антени е помал од бројот на приемни антени. Во овој случај информацијата сеуште се пренесува преку  $M$ -димензионален простор и бројот на степени на слобода останува ист, односно  $M(T - M)$ , што всушност е димензијата на Грасмановото многуобразие.

Анализирајќи го овој случај, Zheng и Tse за капацитетот на MIMO "point-to-point" каналот кога  $M < N$  и  $T \geq M + N$  добиваат

$$C_{M,N}(SNR) \approx M \left(1 - \frac{M}{T}\right) \log_2 SNR + \frac{1}{T} \log_2 |\mathcal{G}_{T,M}^{\mathbb{C}}| \\ M \left(1 - \frac{M}{T}\right) \log_2 \frac{T}{\pi e} + \left(1 - \frac{M}{T}\right) \mathbb{E} [\log_2 \det \mathbf{H}^H \mathbf{H}], \quad (4.20)$$

каде

$$\mathbb{E} [\log \det \mathbf{H}^H \mathbf{H}] = \sum_{i=N-M+1}^N \mathbb{E} [\log \chi_{2i}^2]. \quad (4.21)$$

За разлика од случајот кога  $M \geq N$ , во овој случај дури и при висок однос на SNR не може да се направи апроксимацијата  $h(\mathbf{Y}) \approx h(\mathbf{H}\mathbf{X})$ . Меѓутоа слично како и промената на координатниот систем, со помош на декомпозиција  $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{H}\mathbf{X}$  може да се раздели на два дела и тоа, потпросторот  $\Omega_{\mathbf{X}}$  кој го опишуваат вектор редиците со димензија  $M$ , заедно со  $\mathbf{C}_{\mathbf{H}\mathbf{X}} \in \mathbb{C}^{N \times M}$  која ги специфицира позициите на  $N$ -те вектор редици во зависност од  $\Omega_{\mathbf{X}}$ . Во овој случај бројот на степени на слобода е  $M(T - M) + NM$ . Од геометриска гледна точка  $\mathbf{H}\mathbf{X}$  припаѓа на некое многуобразие  $\mathcal{M}$  од  $\mathbb{C}^{N \times T}$  со димензија  $M(T - M) + NM$ .

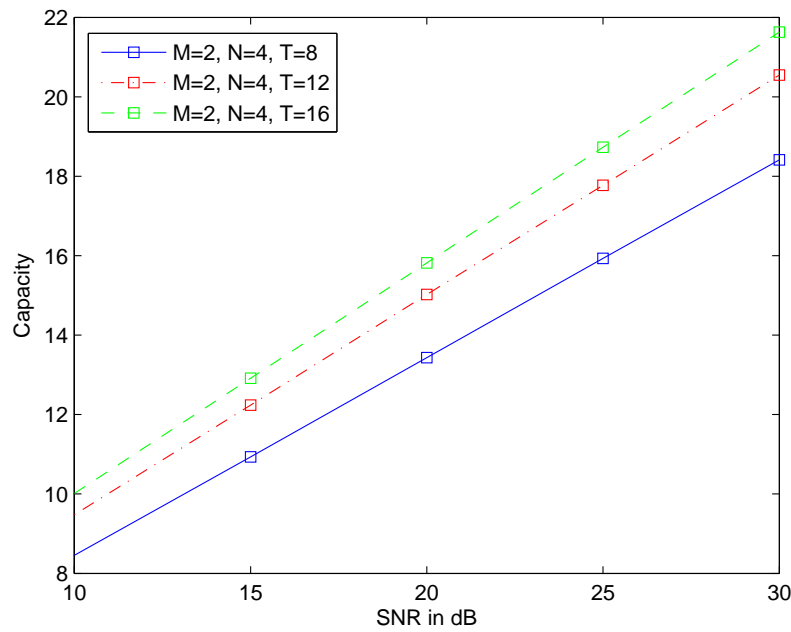
Понатаму самиот приемен сигнал  $\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{W}$  е нарушен од присуството на шумот  $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{N \times T}$ . Со декомозиција на шумот кој е присутен тој може да се раздели на  $\mathbf{W}_1$  кој е компонента од тангентната рамнина на  $\mathcal{M}$  и  $\mathbf{W}_2$  кој е компонентата во нормалниот простор на  $\mathcal{M}$ . Димензиите на  $\mathbf{W}_1$  и  $\mathbf{W}_2$  се

$$\dim(\mathbf{W}_1) = M(T - M) + NM, \quad (4.22)$$

$$\dim(\mathbf{W}_2) = NT - \dim(\mathbf{W}_1) = (N - T)(T - M). \quad (4.23)$$

Бидејќи  $\mathbf{H}\mathbf{X}$  е случаен објект од многуобразјето  $\mathcal{M}$ , при висок однос на SNR, случајноста на  $\mathbf{Y}$  во тангентната рамнина на  $\mathcal{M}$  потекнува од случајноста на  $\mathbf{H}\mathbf{X}$ . Од друга страна, нормалниот простор на  $\mathcal{M}$  е опфатен од  $\mathbf{W}_2$ .

На Слика 4.2 е претставен капацитетот на MIMO "point-to-point" канал во случај кога  $M < N$  и  $T \geq M + N$ .



Слика 4.2: Капацитет при некохерентна комуникација кај "point-to-point" канал, кога  $M < N$  и  $T \geq M + N$

Добивајќи ги овие резултати, Zheng и Tse го определуваат капацитетот на MIMO "point-to-point" канал при некохерентна комуникација и висок однос на SNR. Тие доаѓаат до сознанијата дека имајќи повеќе предавателни антени отколку приемни не го зголемува капацитетот на каналот при всиок однос на SNR. За разлика од тоа покажуваат дека кога бројот на приемни антени е поголем од бројот на предавателни антени се добива зголемување во капацитетот, но бројот на степени на слобода останува ист. Со цел да се добијат максимален број степени на слобода при дадено кохерентно време  $T$ , оптималниот број на предавателни антени треба да биде  $\lfloor \frac{T}{2} \rfloor$ , а бројот на приемни антени треба да не е помал од  $\lfloor \frac{T}{2} \rfloor$ .

## 4.2 Заедничка информација на независно и еднакво распределени комплексни Гаусови сигнали

Rusek, Lozano и Jindal определуваат метод со кој може да се пресметат заедничката информација на независни и еднаков распределени комплексни Гаусови сигнали [15]. Тие го разгледуваат следниот модел:

$$\mathbf{Y} = \sqrt{\frac{SNR}{M}} \mathbf{H} \mathbf{X} + \mathbf{W}, \quad (4.24)$$

каде  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{M \times T}$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{N \times T}$  и  $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{N \times T}$ . Сите ознаки имаат исто значење како и моделот кој го разгледуваат Zheng и Tse.

Заедничката информација која ја испитуваат е следната:

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \frac{1}{T} [\mathbf{h}(\mathbf{Y}) - \mathbf{h}(\mathbf{Y}|\mathbf{X})]. \quad (4.25)$$

Ако со  $E_q(\cdot)$  се означи следниот експоненцијален интеграл

$$E_q(x) = \int_1^\infty t^{-q} e^{-xt} dt, \quad (4.26)$$

Rusek, Lozano и Jindal за условната ентропија добиваат

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = & N \log_2(e) e^{M/SNR} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^i \sum_{l=0}^{2j} \left[ \binom{2i-2j}{i-j} \binom{2j+2T-2M}{2j-l} \frac{(-1)^l (2j)! (T-M+l)!}{2^{2i-l} j! l! (T-M+j)!} \right. \\ & \left. \sum_{q=0}^{T-M+l} E_{q+1}\left(\frac{M}{SNR}\right) \right] + NT \log_2(\pi e). \end{aligned} \quad (4.27)$$

За разлика од условната ентропија  $\mathbf{h}(\mathbf{Y}|\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{Y})$  ја пресметуваат со помош на Монте-Карло симулација водејќи се од

$$\mathbf{h}(\mathbf{Y}) = - \int p(\mathbf{Y}) \log_2 p(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y} = -\mathbb{E}[\log_2 p(\mathbf{Y})]. \quad (4.28)$$

За да се пресмета оваа ентропија тие најпрво дефинираат неколку функции. За  $1 \leq k \leq N$ , се дефинираат следните функции

$$f_k(x) = \int_0^\infty \exp\left\{ \frac{xSNRz}{zSNR+M} - z \right\} \frac{z^{k-1+N-M} (M/SNR)^{k-1}}{(zSNR/M+1)^{T+1-N}} dz. \quad (4.29)$$

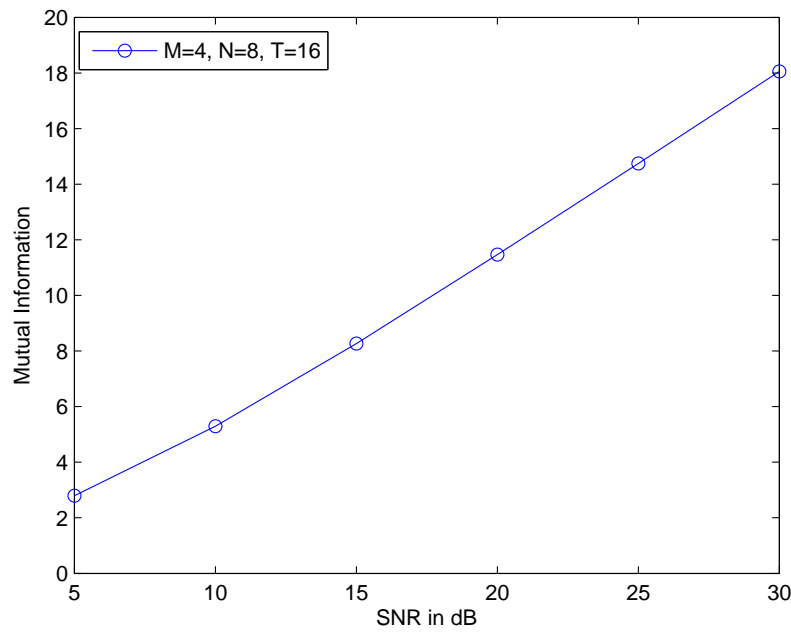
Нека во  $\mathbf{d} = [d_1, \dots, d_N]$  се сместени сопствените вредности на  $\mathbf{Y}^H \mathbf{Y}$  и се дефинира матрица  $\mathbf{Z}$  која е  $N \times N$  матрица каде секој елемент  $Z_{ij} = f_i(d_j)$ , кога  $1 \leq i, j \leq N$ . За распределбата на  $p(\mathbf{Y})$  тие добиваат

$$p(\mathbf{Y}) = \frac{K(\mathbf{Y})}{\prod_{1 \leq i, j \leq N} (d_j - d_i) \prod_{k=0}^{N-1} (M - k - 1)!} \det \mathbf{Z}, \quad (4.30)$$

каде

$$K(\mathbf{Y}) = \frac{e^{-|\mathbf{Y}|^2}}{\pi^{TN}}. \quad (4.31)$$

На Слика 4.3 е претставена заедничката информација која се добива користејќи го овој алгоритам за различни вредности на  $M$ ,  $N$  и  $T$ , во случај кога  $M \geq N$ .



Слика 4.3: Заедничка информација при некохерентна комуникација кај "point-to-point" канал

### 4.3 Кодови заосновани врз основа на Грасмановото многуобразие за некохерентни MIMO системи

Кампош и Belifore даваат можност за конструкција на кодови врз основа на Грасмановото многуобразие за некохерентни MIMO системи [16]. Моделот на системот кој го разгледуваат е :

$$\mathbf{Y}_{T \times N} = \mathbf{X}_{T \times M} \mathbf{H}_{M \times N} + \mathbf{W}_{T \times N}. \quad (4.32)$$

Архитектурата на енкодерот се состои во :

1. Се мапираат  $M(T - M)$  информациски QAM симболи во матрица  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{M \times (T - M)}$  користејќи линеарни трансформации помеѓу симболите и елементите  $c_{ij}$ .
2. Се конструира експоненцијална матрица  $\Upsilon_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^H & 0 \end{pmatrix}$ .
3. Секој коден збор се добива користејќи ја експоненцијалната матрица

$$\mathbf{X} = \exp(\Upsilon_{\mathbf{X}}) \mathbf{I}_{T \times M}. \quad (4.33)$$

Одлуката која ја донесува декодерот се заснова на

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg \max_{\mathbf{X} \in \mathcal{C}} \text{tr}(\mathbf{Y} \mathbf{Y}' \mathbf{X} \mathbf{X}'), \quad (4.34)$$

каде  $\mathcal{C}$  е кодот кој е конструиран.

## Поглавје 5

# Некохерентна комуникација кај МАС

### 5.1 Модел на системот

Резултатите од ова поглавје се делумно презентирани на постери [17], [18] на Европската школа за теорија на информации која се одржа во Охрид од 22.04.2013-26.04.2013.

Мотивирани од можноста за проучување на мобилните околии, каде коефициентите на влијанието на каналот се менуваат доста бргу и не се познати ниту за предавателот, ниту пак за приемникот, од интерес е да се определат некои фундаментални граници на некохерентна комуникација. Мотивирани од работата на Marzetta и Hochwald, и работата на Zheng и Tse овде разгледуваме некохерентна комуникација кај МАС. Моделот на комуникацискиот систем кај некохерентен МАС го запишуваме како

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}\mathbf{X} + \mathbf{W}, \quad (5.1)$$

каде  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{K \times T}$  е влезната матрица,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{N \times T}$  е излезната матрица,  $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{N \times K}$  е матрицата на каналот и  $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{N \times T}$  е шумот кој е присутен.  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{W}$  се матрици чии елементи имаат комплексна Гаусова распределба,  $CN(0,1)$ . Влезната матрица ја избираме така што вектор редиците се:

$$\mathbf{x}_l = \sqrt{\frac{SNR \cdot T}{K}} \mathbf{v}_l, \quad (5.2)$$

каде  $\mathbf{v}_l, l = 1, \dots, K$  се независни и рамномерно распределени на единечна сфера во  $\mathbb{C}^T$ . SNR е средното ниво на односот сигнал-шум кој е присутен на секоја приемна антена.

## 5.2 Некои резултати кои водат кон пресметка на заедничката информација

При анализа на некохерентна комуникација кај МАС, од најголемо значење ни претставува определување на заедничката информација кој понатаму ни би била од помош и при определување на граници кои се поврзани со капацитетот на истиот канал.

Заедничката информација која е потребна да се пресмета е следната:

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \frac{1}{T} (\mathbf{h}(\mathbf{Y}) - \mathbf{h}(\mathbf{Y}|\mathbf{X})). \quad (5.3)$$

### 5.2.1 Анализа на $\mathbf{h}(\mathbf{Y})$

Бидејќи приемниот сигнал е комбинација од множење на каналната матрица со влезниот сигнал и шумот кој е присутен, приемниот сигнал  $\mathbf{Y}$  нема Гаусова распределба. Со цел да ја определеме ентропијата на приемниот сигнал потребно е да ја определеме неговата густината на распределба  $p(\mathbf{Y})$  во затворена форма. Сличен ваков проблем се разгледува во [19]. Добивајќи ја густината на распределба на приемниот сигнал можеме да ја определеме неговата ентропија со Монте-Карло симулација користејќи ја релацијата

$$\mathbf{h}(\mathbf{Y}) = - \int p(\mathbf{Y}) \log_2(p(\mathbf{Y})) d\mathbf{Y} = -\mathbb{E} [\log_2(p(\mathbf{Y}))]. \quad (5.4)$$

#### 5.2.1.1 Пресметка на $p(\mathbf{Y})$

$$p(\mathbf{Y}|\mathbf{V}) = \frac{1}{\pi^{TN}} \frac{\exp\{-\text{tr}\mathbf{Y}(\mathbf{I}_T + \mathbf{X}^H\mathbf{X})^{-1}\mathbf{Y}^H\}}{\det(\mathbf{I}_T + \mathbf{X}^H\mathbf{X})^N}. \quad (5.5)$$

Користејќи LQ декомпозиција на  $\mathbf{X} = \mathbf{L}\mathbf{Q}$ , каде  $\mathbf{L}$  е  $K \times K$  матрица и  $\mathbf{Q}$  е  $K \times T$  матрица, се добива

$$p(\mathbf{Y}|\mathbf{V}) = \frac{1}{\pi^{TN}} \frac{1}{\det(\mathbf{I}_K + \frac{\rho T}{K} \mathbf{V}\mathbf{V}^H)^N} \exp\{-\text{tr}\mathbf{Y}(\mathbf{I}_T + \frac{\rho T}{K} \mathbf{Q}^H\mathbf{L}^H\mathbf{L}\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{Y}^H\}. \quad (5.6)$$

Доколку направиме спектрална декомпозиција на  $\mathbf{L}^H\mathbf{L} = \mathbf{U}_L\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}_L^H$ , каде  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{\Lambda}$  се  $K \times K$  матрици, се добива

$$p(\mathbf{Y}|\mathbf{V}) = \frac{1}{\pi^{TN}} \frac{1}{\det(\mathbf{I}_K + \frac{\rho T}{K} \mathbf{V}\mathbf{V}^H)^N} \exp\{-\text{tr}\mathbf{Y}(\mathbf{I}_T + \frac{\rho T}{K} \mathbf{Q}^H\mathbf{U}_L\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}_L^H\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{Y}^H\}. \quad (5.7)$$

Нека  $\Phi = \mathbf{Q}^H \mathbf{U}$  е  $T \times K$  матрица, па претходната релација можеме да ја запишеме како

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y}|\mathbf{V}) &= \frac{1}{\pi^{TN}} \frac{1}{\det(\mathbf{I}_K + \frac{\rho^T}{K} \mathbf{V} \mathbf{V}^H)^N} \exp\{-\text{tr} \mathbf{Y} (\mathbf{I}_T + \frac{\rho^T}{K} \Phi \Lambda \Phi^H)^{-1} \mathbf{Y}^H\} \\ &= \frac{1}{\pi^{TN}} \frac{1}{\det(\mathbf{I}_K + \frac{\rho^T}{K} \mathbf{V} \mathbf{V}^H)^N} \exp\left\{-\text{tr} \left[ \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H - \mathbf{Y} \Phi (\Phi^H \Phi + \frac{K}{\rho^T} \Lambda^{-1})^{-1} \Phi^H \mathbf{Y}^H \right]\right\} \\ &= \frac{\exp\{-\text{tr} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H\}}{\pi^{TN} \det(\mathbf{I}_K + \frac{\rho^T}{K} \mathbf{V} \mathbf{V}^H)^N} \exp\left\{\text{tr} \left[ \mathbf{Y} \Phi (\Phi^H \Phi + \frac{K}{\rho^T} \Lambda^{-1})^{-1} \Phi^H \mathbf{Y}^H \right]\right\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Од овде следува дека

$$p(\mathbf{Y}|\Lambda) = \frac{\exp\{-\text{tr} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H\}}{\pi^{TN} \det(\mathbf{I}_K + \frac{\rho^T}{K} \mathbf{V} \mathbf{V}^H)^N} \mathbb{E}_{|\Lambda} \exp\left\{\text{tr} \left[ \mathbf{Y} \Phi (\Phi^H \Phi + \frac{K}{\rho^T} \Lambda^{-1})^{-1} \Phi^H \mathbf{Y}^H \right]\right\}, \quad (5.9)$$

каде математичкото очекување се бара врз основа на сите изотропно дистрибуирани унитарни матрици  $\Phi$ . Користејќи спектрална декомпозиција на  $\mathbf{Y}^H \mathbf{Y}$  се добива

$$\mathbf{Y}^H \mathbf{Y} = \mathbf{U} \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma & 0_{M \times (T-M)} \\ 0_{(T-M) \times M} & 0_{(T-M) \times (T-M)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{U}^H, \quad (5.10)$$

каде  $\mathbf{U}$  е унитарна  $T \times T$  матрица,  $\Sigma$  е  $M \times M$  реална дијагонална матрица со позитивни елементи, и  $M = \min(T, N)$ . Од овде добиваме

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{|\Lambda} \exp\left\{\mathbf{Y} \Phi (\mathbf{I}_K + \frac{K}{\rho^T} \Lambda^{-1})^{-1} \Phi^H \mathbf{Y}^H\right\} \\ &= \mathbb{E}_{|\Lambda} \exp\left\{\mathbf{Y}^H \mathbf{Y} \Phi (\mathbf{I}_K + \frac{K}{\rho^T} \Lambda^{-1})^{-1} \Phi^H\right\} \\ &= \mathbb{E}_{|\Lambda} \exp\left\{\mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^H \Phi (\mathbf{I}_K + \frac{K}{\rho^T} \Lambda^{-1})^{-1} \Phi^H\right\} \\ &= \mathbb{E}_{|\Lambda} \exp\left\{\mathbf{A} \mathbf{U}^H \Phi (\mathbf{I}_K + \frac{K}{\rho^T} \Lambda^{-1})^{-1} \Phi^H \mathbf{U}\right\} \\ &= \mathbb{E}_{|\Lambda} \exp\left\{\mathbf{A} \Phi (\mathbf{I}_K + \frac{K}{\rho^T} \Lambda^{-1})^{-1} \Phi^H\right\}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

каде последното равенство го добиваме користејќи го фактот дека  $\Phi$  е изотропно дистрибуирана, ода каде следува дека и  $\mathbf{U}^H \Phi$  е изотропно дистрибуирана унитарна матрица. Ако со  $\mathbf{V}$  ја означиме  $\mathbf{V} = (\mathbf{I}_K + \frac{K}{\rho^T} \Lambda^{-1})^{-1}$ , со цел да ја добиеме  $p(\mathbf{Y}|\Lambda)$ , најпрво треба да го определиме  $\mathbb{E}\{\exp(\text{tr} \mathbf{A} \Phi \mathbf{V} \Phi^H)\}$ , каде математичкото очекување се бара по сите  $T \times K$  изотропно дистрибуирани унитарни матрици  $\Phi$ . Со цел да се направи трансформација со што матрицата  $\mathbf{A}$  би се трансформирала во негативно

дефинирана, потребно е да се избере скалар  $a > 0$  за кој важи  $a\mathbf{I}_T > \mathbf{A}$ . Од овде следува

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{\text{tr}\mathbf{A}\Phi\mathbf{B}\Phi^{\mathbf{H}}} &= e^{\text{tra}\mathbf{B}}\mathbb{E}e^{\text{tr}\mathbf{A}\Phi\mathbf{B}\Phi^{\mathbf{H}}}e^{-\text{tra}\mathbf{B}} \\ &= e^{\text{tra}\mathbf{B}}\mathbb{E}e^{\text{tr}\mathbf{A}\Phi\mathbf{B}\Phi^{\mathbf{H}}}e^{-\text{tra}\Phi\mathbf{B}\Phi^{\mathbf{H}}} \\ &= e^{\text{tra}\mathbf{B}}\mathbb{E}e^{-\text{tr}(a\mathbf{I}_T-\mathbf{A})\Phi\mathbf{B}\Phi^{\mathbf{H}}}.\end{aligned}\quad (5.12)$$

Доколку распределбата на  $\Phi$  е  $p(\Phi)$ , потребно е да се пресмета

$$\mathbb{E}e^{\text{tr}\mathbf{A}\Phi\mathbf{B}\Phi^{\mathbf{H}}} = e^{\text{tra}\mathbf{B}} \int d\Phi p(\Phi) e^{-\text{tr}(a\mathbf{I}_T-\mathbf{A})\Phi\mathbf{B}\Phi^{\mathbf{H}}}.\quad (5.13)$$

Притоа можно е да се даде експлицитна формула за густината на распределба на  $\Phi$ , како  $p(\Phi) = c\delta(\Phi^{\mathbf{H}}\Phi - \mathbf{I}_K)$ , каде  $c$  е соодветна нормализирачка константа. Со цел да се пресмета интегралот, потребно е да се дефинира следниот интеграл за  $p(\Phi)$ :

$$p(\Phi) = \frac{\Gamma(T) \dots \Gamma(T+1-K)}{2^K \pi^{\frac{K}{2}(2T+K+1)}} \int d\Omega \exp\{i\text{tr}\Omega(\Phi^{\mathbf{H}}\Phi - \mathbf{I}_K)\},\quad (5.14)$$

каде интеграцијата се прави по  $K \times K$  Хермитови матрици  $\Omega = \Omega^{\mathbf{H}}$ .

Користејќи го ова, добиваме

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{\text{tr}\mathbf{A}\Phi\mathbf{B}\Phi^{\mathbf{H}}} &= e^{\text{tra}\mathbf{B}} \frac{\Gamma(T) \dots \Gamma(T+1-K)}{2^K \pi^{\frac{K}{2}(2T+K+1)}} \int d\Phi p(\Phi) e^{-\text{tr}(a\mathbf{I}_T-\mathbf{A})\Phi\mathbf{B}\Phi^{\mathbf{H}}} \\ &\cdot \int d\Omega e^{\{i\text{tr}\Omega(\Phi^{\mathbf{H}}\Phi - \mathbf{I}_K)\}} \\ &= e^{\text{tra}\mathbf{B}} \frac{\Gamma(T) \dots \Gamma(T+1-K)}{2^K \pi^{\frac{K}{2}(2T+K+1)}} \int d\Omega e^{-i\text{tr}\Omega} \\ &\cdot \int e^{-\text{tr}[(a\mathbf{I}_T-\mathbf{A})\Phi\mathbf{B}\Phi^{\mathbf{H}} - \Phi i\Omega\Phi^{\mathbf{H}}]}.\end{aligned}\quad (5.15)$$

Користејќи го резултатот дека

$$\int e^{-\text{tr}[(a\mathbf{I}_T-\mathbf{A})\Phi\mathbf{B}\Phi^{\mathbf{H}} - \Phi i\Omega\Phi^{\mathbf{H}}]} = \frac{\pi^{TK}}{\prod_{t=1}^T \det[(a - a_t)\mathbf{B} - i\Omega]},\quad (5.16)$$

за математичкото очекување добиваме

$$\mathbb{E}e^{\text{tr}\mathbf{A}\Phi\mathbf{B}\Phi^{\mathbf{H}}} = e^{\text{tra}\mathbf{B}} \frac{\Gamma(T) \dots \Gamma(T+1-K)}{2^K \pi^{\frac{K}{2}(K+1)}} \int \frac{d\Omega e^{-i\text{tr}\Omega}}{\det[\mathbf{B}(a - a_1) - i\Omega] \dots \det[\mathbf{B}(a - a_T) - i\Omega]}.\quad (5.17)$$

Во нашиот случај имаме

$$\mathbf{A} = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_M, 0, \dots, 0\},$$



каде  $\sigma_m$  се ненултните сопствени вредности  $\mathbf{Y}^H \mathbf{Y}$ ,  $M = \min(T, N)$ , и  $\mathbf{B} = \left( \mathbf{I}_K + \frac{K}{\rho T} \mathbf{\Lambda}^{-1} \right)^{-1}$ . Од овде се добива

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{|\mathbf{\Lambda}} e^{\text{tr} \mathbf{Y} \mathbf{\Phi} (\mathbf{I}_K + \frac{K}{\rho T} \mathbf{\Lambda}^{-1})^{-1} \mathbf{\Phi}^H \mathbf{Y}^H} &= \frac{\Gamma(T) \cdots \Gamma(T+1-K)}{2^K \pi^{\frac{K}{2}(K+1)}} \\ &\cdot \int \frac{d\mathbf{\Omega} e^{\text{tr}(\mathbf{B}a - i\mathbf{\Omega})}}{\det[\mathbf{B}(a - \sigma_1) - i\mathbf{\Omega}] \cdots \det[\mathbf{B}(a - \sigma_M) - i\mathbf{\Omega}] \det[\mathbf{B}a - i\mathbf{\Omega}]^{T-M}}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Со цел да се направи интеграцијата во претходната релација, потребно е да се направи спектрална декомпозиција,  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^H$ , на Хермитовата матрица  $\mathbf{\Omega}$ . Оваа декомпозиција може да се смета како смена на променливи од  $\mathbf{\Omega}$  во  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{\Lambda}$ . Овде мора да укажеме дека подинтегралната функција зависи само од сопствените вредности, и за ваквите функции постои добро познат резултат од теоријата на случајни матрици и тоа

$$\int d\mathbf{\Omega} g(\mathbf{\Omega}) = \int d\mathbf{\Lambda} \frac{\pi^{K(K-1)/2}}{\Gamma(K+1) \cdots \Gamma(1) (2\pi)^K} \prod_{k>l} \prod_l (\lambda_k - \lambda_l)^2 \cdot g(\mathbf{\Lambda}). \quad (5.19)$$

Користејќи го овој резултат за математичкото очекување се добива

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{\text{tr} \mathbf{Y} \mathbf{\Phi} \mathbf{B} \mathbf{\Phi}^H \mathbf{Y}^H} &= \frac{\Gamma(T) \cdots \Gamma(T+1-K)}{\Gamma(K+1) \cdots \Gamma(1) (2\pi)^K} \int d\lambda_1 \cdots \int d\lambda_K \prod_{k=1}^K \\ &\cdot \left( \frac{e^{b_k a - i\lambda_k}}{[b_k(a - \sigma_1) - i\lambda_k] \cdots [b_k(a - \sigma_M) - i\lambda_k] [b_k a - i\lambda_k]^{T-M}} \right) \\ &\cdot \prod_{l<k} (\lambda_k - \lambda_l)^2. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Бидејќи  $\mathbf{\Omega}$  е Хермитова матрица, сопствените вредности  $\lambda_k, k = 1, \dots, K$  се реални и областа на интеграција за  $\lambda_k$  е  $[-\infty, \infty]$ . Ако ја направиме следната смена на променливи  $\lambda_k \rightarrow \lambda_k - ib_k a$  добиваме

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{\text{tr} \mathbf{Y} \mathbf{\Phi} \mathbf{B} \mathbf{\Phi}^H \mathbf{Y}^H} &= \frac{\Gamma(T) \cdots \Gamma(T+1-K) (-1)^{K(K-1)/2}}{\Gamma(K+1) \cdots \Gamma(1) (2\pi)^K} \int d\lambda_1 \cdots \int d\lambda_K \\ &\cdot \prod_{k=1}^K \left[ \frac{e^{-i\lambda_k}}{(-b_k \sigma_1 - i\lambda_k) \cdots (-b_k \sigma_M - i\lambda_k) (-i\lambda_k)^{T-M}} \right] \\ &\cdot \prod_{l<k} ((\lambda_k - ib_k a) - (\lambda_l - ib_l a))^2. \end{aligned} \quad (5.21)$$

*Интегрална формула:* Нека  $f(\cdot)$  е функција од една променлива, тогаш го имаме следниот идентитет

$$\int \left( \prod_{k=1}^K d\lambda_k f(\lambda_k) \right) \prod_{l<k} ((\lambda_k - ib_k a) - (\lambda_l - ib_l a))^2 = K! \det \mathbf{F}, \quad (5.22)$$

каде  $\mathbf{F}$  е  $K \times K$  матрица дефинирана како

$$\mathbf{F} = \int d\lambda f(\lambda) \begin{bmatrix} (\lambda - iba)^0 \\ \vdots \\ (\lambda - iba)^{K-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda - iba)^0 & \cdots & (\lambda - iba)^{K-1} \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Користејќи ја интегралната формула добиваме

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\lambda_1}{2\pi} \cdots \int \frac{d\lambda_K}{2\pi} \cdot \prod_{k=1}^K \left[ \frac{e^{-i\lambda_k}}{(-b_k\sigma_1 - i\lambda_k) \cdots (-b_k\sigma_M - i\lambda_k)(-i\lambda_k)^{T-M}} \right] \\ & \cdot \prod_{l < k} ((\lambda_k - ib_k a) - (\lambda_l - ib_l a))^2 = K! \det \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

каде  $\mathbf{F}$  е  $K \times K$  "Hankel" матрица која е дефинирана со

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_{-\infty+iba}^{\infty+iba} \frac{e^{-i\lambda} d\lambda / (2\pi)}{(-b\sigma_1 - i\lambda) \cdots (-b\sigma_M - i\lambda)(-i\lambda)^{T-M}} \begin{bmatrix} (\lambda - iba)^0 \\ \vdots \\ (\lambda - iba)^{K-1} \end{bmatrix} \\ & \cdot \begin{bmatrix} (\lambda - iba)^0 & \cdots & (\lambda - iba)^{K-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Од овде добиваме

$$\mathbb{E} e^{\text{tr} \mathbf{Y} \mathbf{F} \mathbf{B} \mathbf{F}^H \mathbf{Y}^H} = (-1)^{K(K-1)/2} \frac{\Gamma(T) \cdots \Gamma(T+1-K)}{\Gamma(K) \cdots \Gamma(1)} \det \mathbf{F}, \quad (5.26)$$

од каде за густината на распределба на приемниот сигнал се добива

$$p(\mathbf{Y}) = \frac{(-1)^{K(K-1)/2}}{\pi^{TN}} \frac{\exp\{-\text{tr} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H\}}{\det(\mathbf{I}_K + \frac{\rho^T}{K} \mathbf{V} \mathbf{V}^H)^N} \frac{\Gamma(T) \cdots \Gamma(T+1-K)}{\Gamma(K) \cdots \Gamma(1)} \det \mathbf{F}. \quad (5.27)$$

### 5.2.1.2 Пресметка на елементите на $\mathbf{F}$

Она што преостанува со цел да се дефинира  $p(\mathbf{Y})$  е да се определат елементите на "Hankel" матрицата  $\mathbf{F}$ . Елементот кој се наоѓа на позиција  $(p, n)$  од  $\mathbf{F}$  е претставен како

$$F_{pn} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+iba}^{\infty+iba} d\lambda \frac{e^{-i\lambda} (\lambda - iba)^{p+n-2}}{(-b\sigma_1 - i\lambda) \cdots (-b\sigma_M - i\lambda)(-i\lambda)^{T-M}}. \quad (5.28)$$

Користејќи ја Кошиевата интегрална формула се добива

$$F_{pn} = \frac{1}{2\pi} \cdot (2\pi i) \left[ \sum_{m=1}^M \frac{e^{b_n \sigma_m} (ib_n \sigma_m - ib_n a)^{p+n-2}}{(b_n \sigma_m)^{T-M} \prod_{l \neq m} (b_n \sigma_m - b_l \sigma_l)} + \frac{f^{(T-M-1)}(\lambda)}{(T-M-1)!} \Big|_{\lambda=0} \right], \quad (5.29)$$

каде имаме  $M$  различни полови,  $\lambda = ib_m\sigma_m, m = 1, \dots, M$ , резидуум  $\lambda = 0$  од ред  $T - M$ , и

$$f^{(T-M-1)}(\lambda) = (f^{(T-M-2)})', \quad (5.30)$$

каде

$$f(\lambda) = \frac{e^{-i\lambda(\lambda - iba)^{p+n-2}}}{(-b\sigma_1 - i\lambda) \cdots (-b\sigma_M - i\lambda)}. \quad (5.31)$$

### 5.2.2 Анализа на $h(\mathbf{Y}|\mathbf{X})$

Ако го разгледаме моделот претставен со релацијата (5.3), можеме да забележиме дека кога матрицата  $\mathbf{X}$  е позната, вектор редиците на  $\mathbf{Y}$  се независни и имаат иста коваријансна матрица и тоа

$$\mathbb{E}[\mathbf{y}_l^H \mathbf{y}_l | \mathbf{X}] = \mathbf{I}_T + \mathbf{X}^H \mathbf{X}. \quad (5.32)$$

Имајќи ја во предвид коваријансната матрица на вектор редиците на матрицата  $\mathbf{Y}$ , за условната ентропија се добива:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) &= N\mathbb{E}[\log_2 \det(\mathbf{I}_T + \mathbf{X}^H \mathbf{X})] + \log_2(\pi e)^{TN} \\ &= N\mathbb{E}[\log_2 \det\left(\mathbf{I}_K + \frac{SNR \cdot T}{K} \mathbf{V}\mathbf{V}^H\right)] + TN \log_2(\pi e) \\ &= N\mathbb{E}[\log_2 \det\left(\mathbf{I}_K + \frac{SNR \cdot T}{K} \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^H\right)] + TN \log_2(\pi e). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Од овде можеме да забележиме дека потребно е да го определиме првиот член од десната страна на оваа релација, па затоа овој член ќе го означиме како

$$\Delta = N\mathbb{E}[\log_2 \det\left(\mathbf{I}_K + \frac{SNR \cdot T}{K} \mathbf{V}\mathbf{V}^H\right)]. \quad (5.34)$$

Водејќи сметка дека вектор редиците на  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{K \times T}$  се независни и рамномерно распределени најпрво ќе одиме кон определување на

$$\Upsilon_{T,K} = \ln \det(\mathbf{V}\mathbf{V}^H). \quad (5.35)$$

Ако побараме  $QR$  декомпозиција на матрицата  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ , каде  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H = \mathbf{I}$  и  $\mathbf{R}$  е горно триаголна матрица. Користејќи ја  $QR$  декомпозицијата на  $\mathbf{V}$  и "Bartlett" декомпозицијата добиваме

$$\Upsilon_{T,K} = \ln \det(\mathbf{V}\mathbf{V}^H) = \ln \prod_{k=1}^K r_{kk}^2 = \sum_{k=2}^K \ln r_{kk}^2, \quad (5.36)$$

каде  $r_{kk}^2, k = 1, \dots, K$  се дијагоналните елементи на  $\mathbf{R}$ . Од [11], односно користејќи ја "Bartlett" декомпозицијата следува дека  $r_{kk}^2, k = 2, \dots, K$  се независни и бета распределени со соодветни параметри  $(\alpha_k, \beta_k) = (T - k + 1, k - 1)$  и  $r_{11}^2 = 1$ .

Во нашиот случај се јавува потреба од определување на  $\mathbb{E}[\log_2 \det(\mathbf{I} + \mu \mathbf{Y})]$ , каде  $\mathbf{Y} = \mathbf{V}\mathbf{V}^H$  и  $\mu = \frac{SNRT}{K}$ . Од овде добиваме

$$\Delta_1 = \mathbb{E}[\ln \det(\mathbf{I} + \mu \mathbf{Y})] = \ln \prod_{k=1}^K q_{kk}^2 = \ln(1 + \mu) + \sum_{k=2}^K \ln q_{kk}^2, \quad (5.37)$$

каде  $\lambda_k = q_{kk}^2 = 1 + \mu r_{kk}^2, k = 2, \dots, K$ .

Тргувајќи од фактот дека  $q_{kk}^2$  се независни, за густината на веројатноста на  $\lambda_k$  се добива

$$f(\lambda_k) = \frac{1}{\mu} \frac{\Gamma(\alpha_k + \beta_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\beta_k)} \left(\frac{\lambda_k - 1}{\mu}\right)^{\alpha_k - 1} \left(1 - \frac{\lambda_k - 1}{\mu}\right)^{\beta_k - 1}. \quad (5.38)$$

Користејќи го ова, за  $\Delta_1$  се добива

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \mathbb{E}[\ln \det(\mathbf{I} + \mu \mathbf{Y})] = \mathbb{E}[\ln \prod_{k=1}^K \lambda_k] \\ &= \mathbb{E}[\ln(1 + \mu) + \sum_{k=2}^K \ln \lambda_k] \\ &= \ln(1 + \mu) + \sum_{k=2}^K \int_1^{\mu+1} \ln \lambda_k \frac{\Gamma(\alpha_k + \beta_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\beta_k)} \frac{1}{\mu} \left(\frac{\lambda_k - 1}{\mu}\right)^{\alpha_k - 1} \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{\lambda_k - 1}{\mu}\right)^{\beta_k - 1} d\lambda_k \\ &\quad \text{supst : } \{\lambda_k = 1 + \mu x_k, d\lambda_k = \mu dx_k\} \\ &= \ln(1 + \mu) + \sum_{k=2}^K \int_0^1 \ln(1 + \mu x_k) \frac{\Gamma(\alpha_k + \beta_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\beta_k)} \frac{1}{\mu} x_k^{\alpha_k - 1} \\ &\quad \cdot (1 - x_k)^{\beta_k - 1} \mu dx_k \\ &= \ln(1 + \mu) + \sum_{k=2}^K \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha_k + \beta_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\beta_k)} x_k^{\alpha_k - 1} (1 - x_k)^{\beta_k - 1} \\ &\quad \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{\mu^i x_k^i}{i} dx_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln(1 + \mu) + \sum_{k=2}^K \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu^i}{i} (-1)^{i-1} \frac{\Gamma(\alpha_k + \beta_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\beta_k)} \\
&\cdot \int_0^1 x_k^{i+\alpha_k-1} (1-x_k)^{\beta_k-1} dx_k \\
&= \ln(1 + \mu) \\
&+ \sum_{k=2}^K \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{\mu^i}{i} \frac{\Gamma(\alpha_k + \beta_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\beta_k)} B(i + \alpha_k, \beta_k). \tag{5.39}
\end{aligned}$$

Откако го определевме членот  $\Delta_1$ , и користејќи дека  $\Delta = N\Delta_1 \log_2 e$ , за условната ентропија добиваме

$$\begin{aligned}
h(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) &= \Delta + \log_2(\pi e)^{TN} \\
&= N \log_2 e (\ln(1 + \mu) + \sum_{k=2}^K \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{\mu^i}{i} \frac{\Gamma(T)}{\Gamma(T-k+1)\Gamma(k-1)} \\
&\cdot B(i + T - k + 1, k - 1)) + \log_2(\pi e)^{TN}, \tag{5.40}
\end{aligned}$$

каде  $\mu = \frac{SNR \cdot T}{K}$  и  $B(.,.)$  е бета функција.

Релацијата (5.40) која ја добивме за условната ентропија важи за сите вредности на SNR. Доколку се фокусираме само на високи вредности од SNR за условната ентропија се добива

$$\begin{aligned}
h(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) &= N\mathbb{E} [\log_2 \det (I_T + \mathbf{X}^H \mathbf{X})] + \log_2(\pi e)^{TN} \\
&= N\mathbb{E} \left[ \log_2 \det \left( \mathbf{I}_K + \frac{SNR \cdot T}{K} \mathbf{V} \mathbf{V}^H \right) \right] + TN \log_2(\pi e) \\
&= N\mathbb{E} \left[ \log_2 \det \left( \mathbf{I}_K + \frac{SNR \cdot T}{K} \mathbf{\Sigma} \mathbf{\Sigma}^H \right) \right] + TN \log_2(\pi e) \\
&\approx NK \log_2 \left( \frac{SNR \cdot T}{K} \right) + N\mathbb{E} [\log_2 \det (\mathbf{\Sigma} \mathbf{\Sigma}^H)] + TN \log_2(\pi e). \tag{5.41}
\end{aligned}$$

Од овде ни преостанува да го определиме само вториот член од десната страна на релацијата (5.41) и за таа цел ја користиме релацијата (5.36). Во овој случај следува дека  $r_{kk}^2$ ,  $k = 2, \dots, K$  се независни и бета распределени со соодветни параметри  $(\alpha_k, \beta_k) = (T - k + 1, k - 1)$ . Ако  $\lambda_k = r_{kk}^2$ , тогаш густината на веројатноста на  $\lambda_k$  е

$$f(\lambda_k) = \frac{\Gamma(\alpha_k + \beta_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\beta_k)} \lambda_k^{\alpha_k-1} (1 - \lambda_k)^{\beta_k-1}. \tag{5.42}$$

Користејќи го ова, за  $\Upsilon_{T,K}$ , добиваме

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Upsilon_{T,K}] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=2}^K \ln \lambda_k\right] = \sum_{k=2}^K \mathbb{E}[\ln \lambda_k] \\
&= \sum_{k=2}^K \int_0^1 \ln \lambda_k \frac{\Gamma(\alpha_k + \beta_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\beta_k)} \lambda_k^{\alpha_k-1} (1 - \alpha_k)^{\beta_k-1} d\lambda_k; \\
&\quad \text{supst : } \{\lambda_k = 1 - y_k, d\lambda_k = -dy_k\} \\
&= - \sum_{k=2}^K \int_1^0 \ln(1 - y_k) \frac{\Gamma(\alpha_k + \beta_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\beta_k)} (1 - y_k)^{\alpha_k-1} y_k^{\beta_k-1} dy_k \\
&= - \sum_{k=2}^K \frac{\Gamma(\alpha_k + \beta_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\beta_k)} \int_0^1 (1 - y_k)^{\alpha_k-1} y_k^{\beta_k-1} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_k^i}{i} \right) dy_k \\
&= - \sum_{k=2}^K \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_k + \beta_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\beta_k)} \frac{1}{i} \int_0^1 (1 - y_k)^{\alpha_k-1} y_k^{\beta_k+i-1} dy_k \\
&= - \sum_{k=2}^K \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_k + \beta_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\beta_k)} \cdot \frac{B(\beta_k + i, \alpha_k)}{i}, \tag{5.43}
\end{aligned}$$

каде  $B(.,.)$  е бета функција.

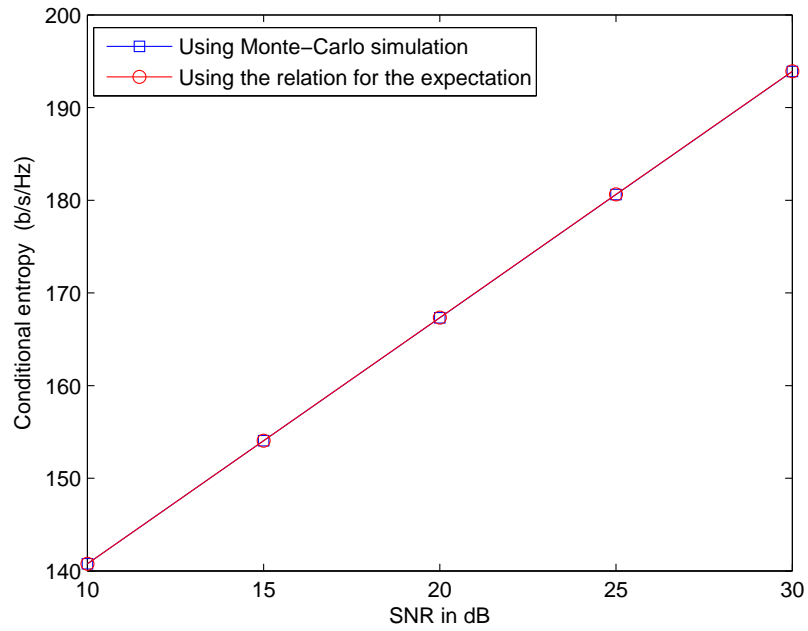
Притоа за условната ентропија при високи вредности на SNR се добива

$$\begin{aligned}
h(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) &= NK \log_2 \left( \frac{SNR \cdot T}{K} \right) + N \mathbb{E} [\log_2 \det(\Sigma \Sigma^H)] + TN \log_2(\pi e) \\
&= NK \log_2 \left( \frac{SNR \cdot T}{K} \right) - N \log_2 e \sum_{k=2}^K \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Gamma(T)}{\Gamma(T - k + 1)\Gamma(k - 1)} \\
&\quad \cdot \frac{B(k - 1 + i, T - k + 1)}{i} + TN \log_2(\pi e) \tag{5.44}
\end{aligned}$$

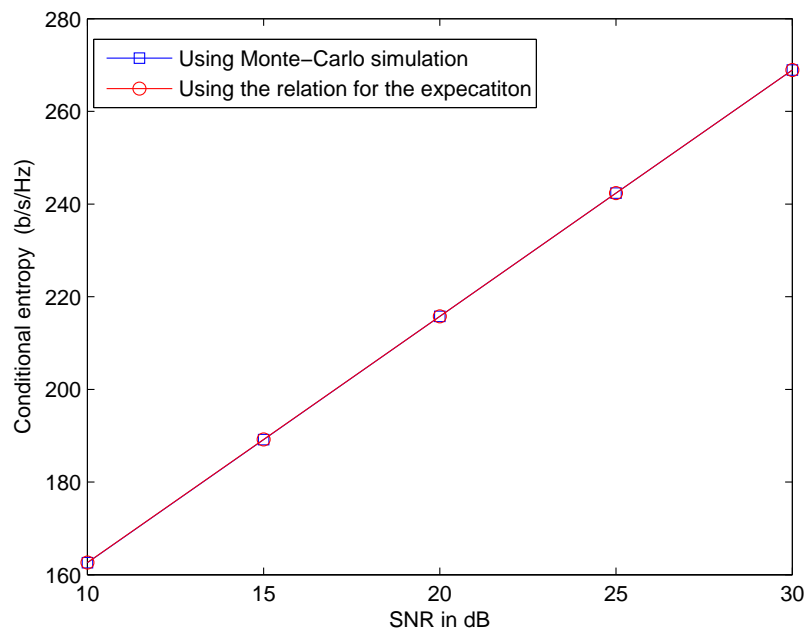
Во релациите (5.39) и (5.43) интеграцијата е направена користејќи Тајлоров развој за подинтегралната функција.

### 5.3 Примери и резултати од симулации

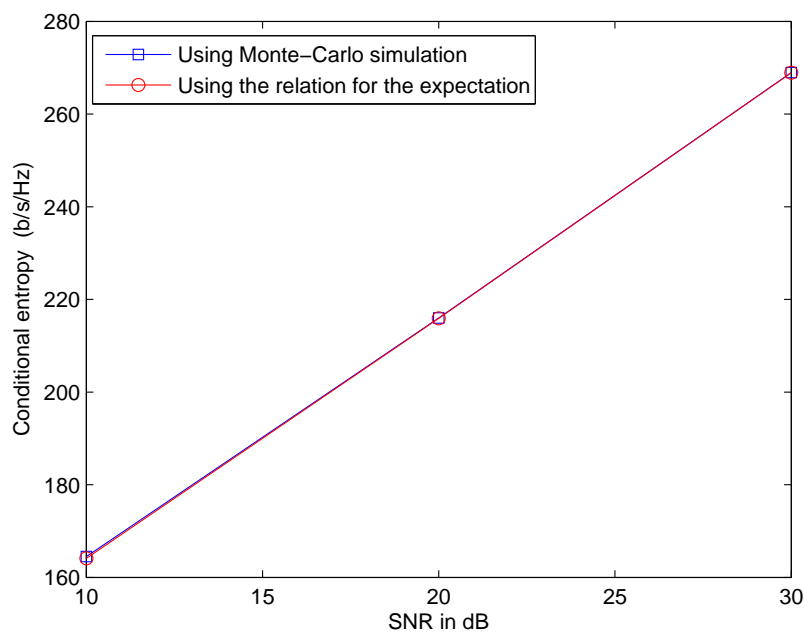
На Слика 5.1 и Слика 5.2 е претставена условната ентропија при некохерентна комуникација кај MAC, за различни вредности на бројот на предавателни и приемни антени, кога математичкото очекување се определува користејќи Монте-Карло симулација, а од друга страна користејќи ја релацијата (5.44). На Слика 5.3 е претставена условната ентропија при некохерентна комуникација кај MAC, во случај кога математичкото очекување се определува користејќи Монте-Карло симулација, а од друга страна користејќи ја релацијата (5.40).



Слика 5.1: Условна ентропија при некохерентна комуникација кај MAC:  $K=2$ ,  $N=4$ ,  $T=8$

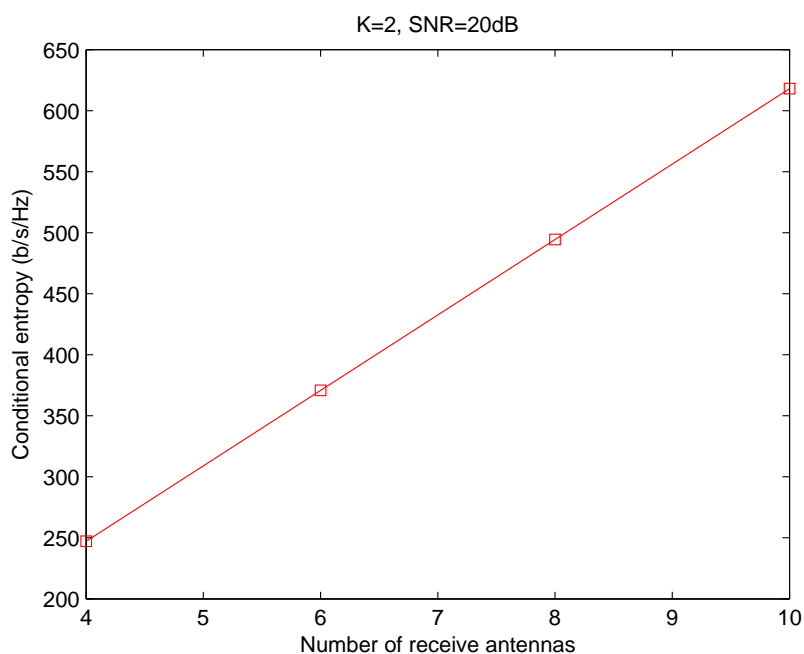


Слика 5.2: Условна ентропија при некохерентна комуникација кај MAC:  $K=4$ ,  $N=4$ ,  $T=8$



Слика 5.3: Условна ентропија при некохерентна комуникација кај MAC:  $K=4$ ,  $N=4$ ,  $T=8$

На Слика 5.4 е претставена врска помеѓу условната ентропија и бројот на приемни антени, во случај кога бројот на предавателни антени и односот на сигнал-шум се фиксирани. Од овде можеме да заклучиме дека со зголемување на бројот на приемните антени се зголемува и условната ентропија при некохерентна комуникација на MAC.



Слика 5.4: Врска помеѓу условната ентропија и бројот на приемни антени



## 5.4 Заклучок

Од примерите може да заклучиме дека условната ентропија во овој случај е иста користејќи ги релациите кои ги имаме добиено споредено со вредностите кои се добиени за истата користејќи Монте-Карло симулација. Користејќи ги резултатите добиени за условната ентропија при некохерентна комуникација кај МАС, и имајќи ја формата за густината на распределба на приемниот сигнал останува отворен проблемот за симулирање на ентропијата на приемниот сигнал, од каде би се добила и заедничката информација при некохерентна комуникација кај МАС, а со тоа ќе се отворат и нови можности за идни истражувања.

## Поглавје 6

# "Pre - log" регион за MIMO "two-way" канал со реле

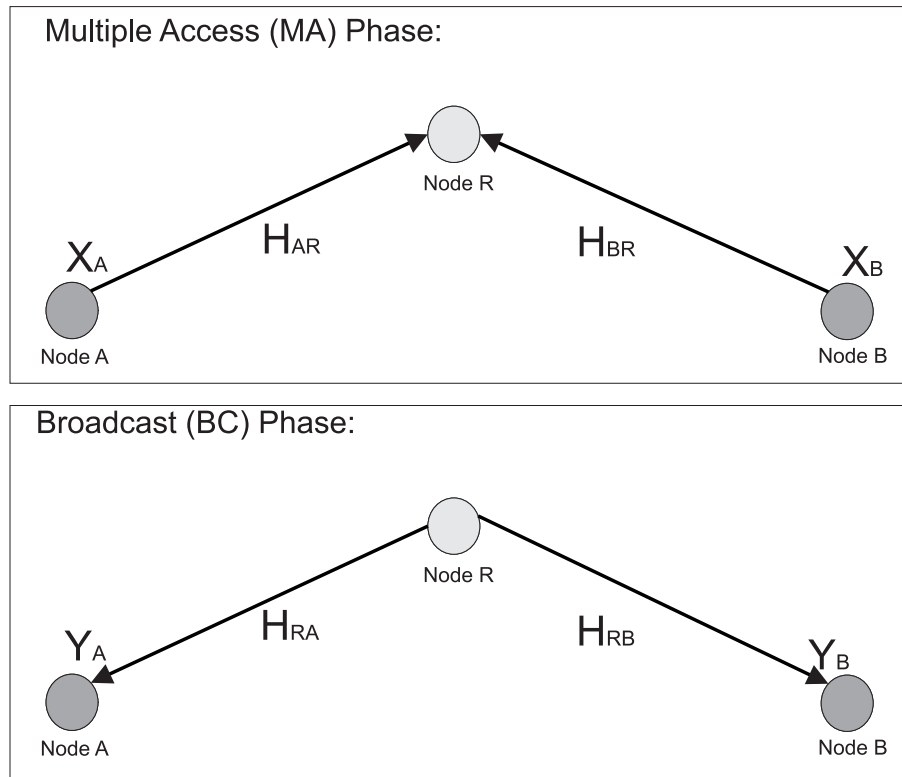
Во овој дел ќе се фокусираме на мрежа која се состои од три јазли кои комуницираат, од кои еден од нив се однесува како реле и овозможува двонасочена комуникација помеѓу останатите јазли, односно терминали. Претпоставуваме дека нема директен линк помеѓу терминалите и системот работи во "half-duplex" мод, каде самите јазли не пренесуваат и примаат истовремено. Овде ќе се задржиме на перформансите кои се добиваат при "amplify-and-forward" (AF) стратегијата која ја користи релето и ќе дефинираме "pre-log" регион за ваквата шема, кој се дефинира како лимес од односот помеѓу ратата на регионот и логаритам од SNR, кога  $SNR \rightarrow \infty$ . Мотивацијата за определување на "pre-log" регионот е поради тоа што тој е едниот од главните индикатори при определување на перформансите кај оваа стратегија при високи вредности на SNR.

Резултатите од ова поглавје се презентирани во [20].

### 6.1 Модел на системот

Моделот на системот кој го разгледуваме е составен од два корисници, A и B, и едно реле, R. Притоа не постои директен линк помеѓу корисниците и мрежата работи во "half-duplex" мод, односно корисниците и релето не може да праќаат и примаат истовремено. Самиот канал сметаме дека е константен за време од  $T$  симболи, а потоа се менува во нова реализација. Ова време уште е познато како кохерентно време. Самиот модел е претставен на Слика 6.1.

Комуникацијата кај овој модел се одвива во две фази, од која секоја од нив трае за време од  $T$ . Првата фаза е МА("multiple access") фазата, каде двајцата корисници



Слика 6.1: "Two-way" канал со реле

ја испраќаат својата информација до релето. Овие сигнали се пренесуваат до релето, кое ги комбинира и извршува некоја операција над истите во зависност од стратегијата која ја користи. Наредната фаза е BC ("broadcast") фазата, каде релето R го препраќа сигналот кој е добиен кај него до двајцата корисници. Во зависност од приемниот сигнал и тоа што секој од корисниците го знае својот сигнал кој е пратен, секој корисник може да ја декодира информацијата од другиот. Во нашиот случај корисникот A има  $M_A$  предавателни антени, корисникот B има  $M_B$  предавателни антени, а релето R има  $M_R$  антени. Во MA фазата која е со времетраење  $T$ , каналот помеѓу A и R е означен со  $\mathbf{H}_{AR}$ , каналот помеѓу B и R е означен со  $\mathbf{H}_{BR}$ . Во BC фазата која е со времетраење  $T$ , каналот помеѓу R и A е означен со  $\mathbf{H}_{RA}$ , каналот помеѓу R и B е означен со  $\mathbf{H}_{RB}$ . Елементите од овие матрици се независни и еднакво распределени, кои имаат кружно симетрична комплексна Гаусова распределба,  $CN(0, 1)$ . Сигналот кој се пренесува од корисникот A го означуваме со  $\mathbf{X}_A$ , додека сигналот кој се пренесува од корисникот B го означуваме со  $\mathbf{X}_B$ . Со  $P$  ја означуваме средната моќност на едно праќање од корисникот A и корисникот B, додека со  $P_R$  ќе ја означиме средната моќност на едно пренесување од страна на релето R.

Она за што сме заинтересирани се всушност индивидуалните рати помеѓу линковите

$A \rightarrow B$  и  $B \rightarrow A$ , односно

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{1}{2} I(\mathbf{X}_A; \mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_B); \\ R_B &= \frac{1}{2} I(\mathbf{X}_B; \mathbf{Y}_A | \mathbf{X}_A). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Во "pre-log" регионот,  $\frac{1}{2}$  се јавува поради "half-duplex" модот. Сигналот кој го прима релето  $R$  во  $MA$  фазата е претсатвен како

$$\mathbf{Y}_R = \mathbf{H}_{AR} \mathbf{X}_A + \mathbf{H}_{BR} \mathbf{X}_B + \mathbf{Z}_R, \quad (6.2)$$

каде  $\mathbf{Z}_R$  е матрицата на шумот кој е присутен кај релето, а чии елементи се независни и еднакво распределени со комплексна Гаусова распределба,  $CN(0, \sigma^2)$ .

Користејќи го AF протоколот, во  $BC$  фазта релето го пренесува сигналот

$$\mathbf{X}_R = \sqrt{\gamma_R} \mathbf{Y}_R, \quad (6.3)$$

каде  $\gamma_R = \frac{P_R}{2P + \sigma^2}$  е фактор на нормализација.

Бидејќи кај самиот модел на системот постои симетрија, доволно е да се анализира само сигналот кој е пристигнат кај еден од корисниците и нека во нашиот случај тоа биде корисникот  $B$ . Овој сигнал е претставен како

$$\mathbf{Y}_B = \sqrt{\gamma_R} \mathbf{H}_{RB} \mathbf{H}_{AR} \mathbf{X}_A + \sqrt{\gamma_R} \mathbf{H}_{RB} \mathbf{H}_{BR} \mathbf{X}_B + \mathbf{W}_B, \quad (6.4)$$

каде  $\mathbf{W}_B$  е шумот кој е присутен кај корисникот  $B$ , каде присуство има и шумот од релето, односно

$$\mathbf{W}_B = \sqrt{\gamma_R} \mathbf{H}_{RB} \mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_B, \quad (6.5)$$

каде  $\mathbf{Z}_B$  е матрицата на шумот кај корисникот  $B$ , чии елементи се независни и еднакво распределени со комплексна Гаусова распределба,  $CN(0, \sigma^2)$ .

Од овде добиваме дека елементите на  $\mathbf{W}_B$  не се Гаусови и имаат варијанса

$$\nu^2 = M \gamma_R \sigma^2 + \sigma^2. \quad (6.6)$$

Доколку ја направиме замената  $\mathbf{H}_A = \mathbf{H}_{RB} \mathbf{H}_{AR}$  и  $\mathbf{H}_B = \mathbf{H}_{RB} \mathbf{H}_{BR}$ , сигналот кај  $B$  можеме да го запишеме во облик

$$\mathbf{Y}_B = \sqrt{\gamma_R} \mathbf{H}_A \mathbf{X}_A + \sqrt{\gamma_R} \mathbf{H}_B \mathbf{X}_B + \mathbf{W}_B. \quad (6.7)$$

Членот  $\sqrt{\gamma_R} \mathbf{H}_B \mathbf{X}_B$  кој се јавува овде може да се смета како интерференција од самиот себе, меѓутоа не може да се одземе од приемниот сигнал, бидејќи не го знаеме сигналот, меѓутоа знаејќи го пратениот сигнал  $\mathbf{X}_B$  корисникот може да ја знае

насоката на интерференцијата од самиот себе и тоа да му помогне при декодирањето. Матриците  $\mathbf{H}_A$  и  $\mathbf{H}_B$  се производ од Гаусови матрици и поради тоа не се Гаусови, а исто така се и зависни помеѓу себе.

Притоа сметаме дека влезните сигнали  $\mathbf{X}_A$  и  $\mathbf{X}_B$  се независни, унитарни и изотропно дистрибуирани, односно

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_A &= \sqrt{\frac{PT}{M}} \mathbf{V}_A; \\ \mathbf{X}_B &= \sqrt{\frac{PT}{M}} \mathbf{V}_B,\end{aligned}\tag{6.8}$$

каде  $\mathbf{V}_A$  и  $\mathbf{V}_B$  се рамномерно распределени на Штифеловото многуобразие.

## 6.2 Пресметка на $I(\mathbf{X}_A; \mathbf{Y} | \mathbf{X}_B)$ и $I(\mathbf{X}_B; \mathbf{Y} | \mathbf{X}_A)$ кога $M_A = M_B = M_R$ и $T \geq M_A + M_B$ .

За пресметка на овие заеднички информации, доволно е да ја определеме едната, а бидејќи моделот на системот е симетричен аналогно на едната ќе ја определеме и останатата заедничка информација. Заедничката информација помеѓу корисникот А и корисникот В е следнава

$$I(\mathbf{X}_A; \mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_B) = h(\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_B) - h(\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B)\tag{6.9}$$

### 6.2.1 Анализа на $h(\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_B)$

Бидејќи условноста не ја зголемува ентропијата, за оваа условна ентропија добиваме

$$\begin{aligned}h(\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_B) &\geq h(\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_B, \mathbf{H}_B = \mathbf{H}_{RB} \mathbf{H}_{BR}) \approx h(\sqrt{\gamma_R} \mathbf{H}_{RB} \mathbf{H}_{AR} \mathbf{X}_A | \mathbf{H}_{RB}) \\ &= MT \log_2 \gamma_R + h(\mathbf{H}_{AR} \mathbf{X}_A) + M \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{H}_{RB} \mathbf{H}_{RB}^H)].\end{aligned}\tag{6.10}$$

Користејќи ја релацијата за ентропија на изотропно дистрибуирана матрица, и користејќи го фактот дека  $\mathbf{H}_{AR} \mathbf{X}_A$  е изотропно дистрибуирана, за условната ентропија која ни е од интерес на анализа добиваме

$$\begin{aligned}h(\mathbf{H}_{AR} \mathbf{X}_A) &= MT \log_2 \frac{PT}{M} + h(\mathbf{C}_{\mathbf{H}_{AR} \mathbf{V}_A}) + \log_2 |\mathcal{G}_{T,M}^C| + (T - M) \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{H}_{AR} \mathbf{H}_{AR}^H)] \\ &= MT \log_2 \frac{PT}{M} + h(\mathbf{H}_{AR}) + \log_2 |\mathcal{G}_{T,M}^C| + (T - M) \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{H}_{AR} \mathbf{H}_{AR}^H)] \\ &= MT \log_2 \frac{PT}{M} + M^2 \log_2 \pi e + \log_2 |\mathcal{G}_{T,M}^C| + (T - M) \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{H}_{AR} \mathbf{H}_{AR}^H)].\end{aligned}\tag{6.11}$$

### 6.2.2 Анализа на $h(\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B)$

Во овој случај за дадени  $\mathbf{X}_A$  и  $\mathbf{X}_B$ ,  $\mathbf{Y}_B$  нема Гаусова распределба, бидејќи  $\mathbf{H}_A$ ,  $\mathbf{H}_B$  и  $\mathbf{W}_B$  немаат Гаусова распределба. Меѓутоа и покрај ова следува дека

$$h(\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B) \leq h(\mathbf{N}_B), \quad (6.12)$$

каде  $\mathbf{N}_B$  е Гаусова матрица со иста коваријансна матрица како и  $\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{N}^H \mathbf{N}] &= \mathbb{E}[\mathbf{Y}_B^H \mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B] \\ &= \frac{M\gamma_R PT}{M} \mathbf{V}_A^H \mathbf{V}_A + \frac{M\gamma_R PT}{M} \mathbf{V}_B^H \mathbf{V}_B + \nu^2 \mathbf{I}_T. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Користејќи го ова, за условната ентропија која ни е од интерес на анализа добиваме

$$\begin{aligned} h(\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B) &\leq M \mathbb{E}[\log_2 \det(\nu^2 \mathbf{I}_T + \frac{M\gamma_R PT}{M} \mathbf{V}_A^H \mathbf{V}_A + \frac{M\gamma_R PT}{M} \mathbf{V}_B^H \mathbf{V}_B)] \\ &\quad + \log_2 (\pi e)^{TM} \\ &= M \mathbb{E}[\log_2 \det(\mathbf{I}_{2M} + \frac{M\gamma_R PT}{M\nu^2} \mathbf{V}_A^H \mathbf{V}_A + \frac{M\gamma_R PT}{M\nu^2} \mathbf{V}_B^H \mathbf{V}_B)] + MT \log_2 (\pi e \nu^2) \\ &\approx M \mathbb{E}[\log_2 \det(\mathbf{V}_A^H \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B^H \mathbf{V}_B)] + 2M^2 \log_2 \frac{M\gamma_R PT}{M\nu^2} + MT \log_2 \pi e \nu^2. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Од друга страна ако ја искористиме релацијата (4.27), за  $h(\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_A; \mathbf{X}_B)$  добиваме

$$\begin{aligned} h(\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_A; \mathbf{X}_B) &= N \log_2(e) e^{\frac{2M}{SNR}} \sum_{i=0}^{2M-1} \sum_{j=0}^i \sum_{l=0}^{2j} \left[ \binom{2i-2j}{i-j} \cdot \binom{2j+2T-4M}{2j-l} \right. \\ &\quad \cdot \left. \frac{(-1)^l (2j)! (T-2M+l)!}{2^{2i-l} j! l! (T-2M+j)!} \cdot \sum_{q=0}^{T-2M+l} E_{q+1} \left( \frac{2M}{SNR} \right) \right] + NT \log_2(\pi e), \end{aligned} \quad (6.15)$$

каде SNR е дефиниран како:

$$SNR = \frac{P_R P}{2P + \sigma^2} \frac{2 + \sigma^2}{\sigma^2}. \quad (6.16)$$

### 6.2.3 Пресметка на $I(\mathbf{X}_A; \mathbf{Y} | \mathbf{X}_B)$

Комбинирајќи ги релациите (6.10), (6.11) и (6.14) за заедничката информација добиваме

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{X}_A; \mathbf{Y}_B | \mathbf{Y}_B) &\geq M(T - 2M) \log_2 \frac{\gamma_R PT}{\nu^2} + \log_2 |\mathcal{G}_{T,M}^C| - MT \log_2 M \\
&\quad + (T - M) \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{H}_{AR} \mathbf{H}_{AR}^H)] + M \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{H}_{RB} \mathbf{H}_{RB}^H)] \\
&\quad - M(T - M) \log_2 \pi e - M \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{V}_A^H \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B^H \mathbf{V}_B)] \\
&= M(T - 2M) \log_2 \frac{\gamma_R PT}{\nu^2} + \log_2 |\mathcal{G}_{T,M}^C| \\
&\quad - MT \log_2 M + T \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{H}_{AR} \mathbf{H}_{AR}^H)] \\
&\quad - M \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{V}_A^H \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B^H \mathbf{V}_B)] - M(T - M) \log_2 \pi e, \quad (6.17)
\end{aligned}$$

каде последната равенка е добиена водејќи се од фактот дека

$$\mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{H}_{AR} \mathbf{H}_{AR}^H)] = \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{H}_{RB} \mathbf{H}_{RB}^H)]. \quad (6.18)$$

Ако сметаме дека  $P = P_R/2$  за високи вредности на SNR и дека  $\gamma_r \approx 1$ , а  $\nu^2 = M\sigma^2 + \sigma^2$ , за заедничката информација добиваме

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{X}_A; \mathbf{Y}_B | \mathbf{Y}_B) &\geq M(T - 2M) \log_2 \frac{PT}{(\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{M})M} + \log_2 |\mathcal{G}_{T,M}^C| - MT \log_2 M \\
&\quad + T \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{H}_{AR} \mathbf{H}_{AR}^H)] - M \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{V}_A^H \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B^H \mathbf{V}_B)] \\
&\quad - M(T - M) \log_2 \pi e. \quad (6.19)
\end{aligned}$$

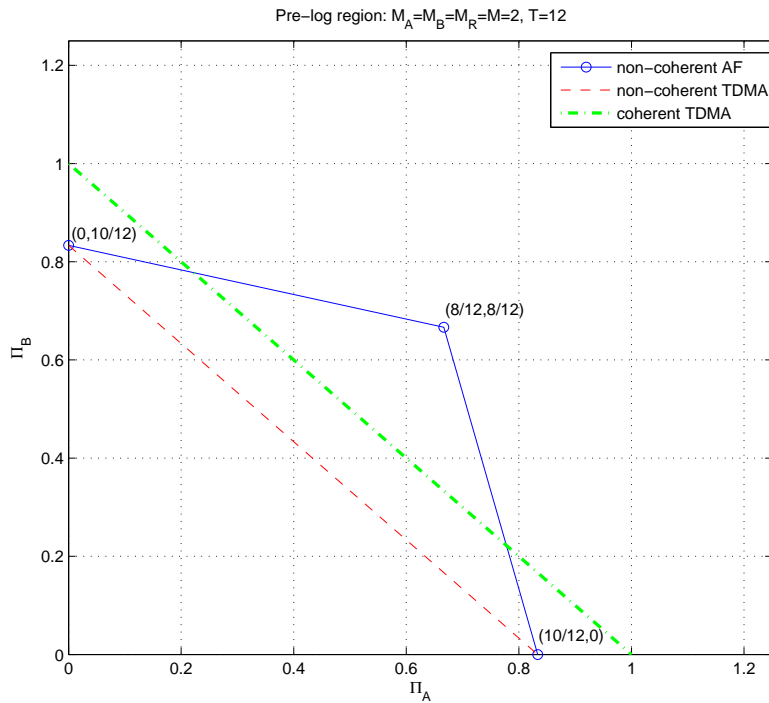
### 6.2.4 "Pre-log" регион

"Pre-log" регионот за корисниците A и B се дефинира како

$$\begin{aligned}
\Pi_{R_A} &\doteq \limsup_{\frac{P}{\sigma^2} \rightarrow \infty} \frac{R_A(\frac{P}{\sigma^2})}{\log \frac{P}{\sigma^2}}, \\
\Pi_{R_B} &\doteq \limsup_{\frac{P}{\sigma^2} \rightarrow \infty} \frac{R_B(\frac{P}{\sigma^2})}{\log \frac{P}{\sigma^2}}, \quad (6.20)
\end{aligned}$$

и во нашиот случај е

$$\Pi_{R_A} = \Pi_{R_B} = \frac{M}{2}(T - 2M). \quad (6.21)$$



Слика 6.2: "Pre-log" регион за MIMO "two-way" канал со реле

Во нашиот случај достижни се следниве "pre-log" парови

$$\begin{aligned}
 (\Pi_{R_A}, \Pi_{R_B}) &= \left( \frac{M}{2}(T - M), 0 \right); \\
 (\Pi_{R_A}, \Pi_{R_B}) &= \left( 0, \frac{M}{2}(T - M) \right); \\
 (\Pi_{R_A}, \Pi_{R_B}) &= \left( \frac{M}{2}(T - 2M), \frac{M}{2}(T - 2M) \right).
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

На Слика 6.2 е претставен "pre-log" регионот кога  $M = 2$  и  $T = 12$  и истовремено е споредено со TDMA при кохерентна и некохерентна комуникација. За високи вредности на  $T$  оваа шема го надминува TDMA.

### 6.3 Пресметка на $I(\mathbf{X}_A; \mathbf{Y} | \mathbf{X}_B)$ и $I(\mathbf{X}_B; \mathbf{Y} | \mathbf{X}_A)$ кога $M_A \neq M_B$ , $M_R = \max(M_A, M_B)$ и $T \geq M_A + M_B$

Овде го разгледуваме истиот проблем во малку поинакви услови, односно кога  $M_A \neq M_B$ ,  $M_R = \max(M_A, M_B)$  и  $T \geq M_A + M_B$ . Заедничката информација помеѓу корисникот А и корисникот В е следнава

$$I(\mathbf{X}_A; \mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_B) = h(\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_B) - h(\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B) \tag{6.23}$$



### 6.3.1 Анализа на $h(\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_B)$

Бидејќи условноста не ја зголемува ентропијата, за оваа условна ентропија добиваме

$$\begin{aligned} h(\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_B) &\geq h(\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_B, \mathbf{H}_B = \mathbf{H}_{RB} \mathbf{H}_{BR}) \approx h(\sqrt{\gamma_R} \mathbf{H}_{RB} \mathbf{H}_{AR} \mathbf{X}_A | \mathbf{H}_{RB}) \\ &= M_B T \log_2 \gamma_R + h(\mathbf{H}_{AR} \mathbf{X}_A) + M_B \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{H}_{RB} \mathbf{H}_{RB}^H)]. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Користејќи ја релацијата за ентропија на изотропно дистрибуирана матрица, и користејќи го фактот дека  $\mathbf{H}_{AR} \mathbf{X}_A$  е изотропно дистрибуирана, за условната ентропија која ни е од интерес на анализа добиваме

$$\begin{aligned} h(\mathbf{H}_{AR} \mathbf{X}_A) &= M_R T \log_2 \frac{PT}{M_R} + h(\mathbf{C}_{\mathbf{H}_{AR} \mathbf{V}_A}) + \log_2 |\mathcal{G}_{T, M_R}^C| \\ &\quad + (T - M_R) \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{H}_{AR} \mathbf{H}_{AR}^H)] \\ &= M_R T \log_2 \frac{PT}{M_R} + h(\mathbf{H}_{AR}) + \log_2 |\mathcal{G}_{T, M_R}^C| \\ &\quad + (T - M_R) \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{H}_{AR} \mathbf{H}_{AR}^H)] \\ &= M_R T \log_2 \frac{PT}{M_R} + M_R M_A \log_2 \pi e + \log_2 |\mathcal{G}_{T, M_R}^C| \\ &\quad + (T - M_R) \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{H}_{AR} \mathbf{H}_{AR}^H)]. \end{aligned} \quad (6.25)$$

### 6.3.2 Анализа на $h(\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B)$

Во овој случај за дадени  $\mathbf{X}_A$  и  $\mathbf{X}_B$ ,  $\mathbf{Y}_B$  нема Гаусова распределба, бидејќи  $\mathbf{H}_A$ ,  $\mathbf{H}_B$  и  $\mathbf{W}_B$  немаат Гаусова распределба. Меѓутоа и покрај ова следува дека

$$h(\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B) \leq h(\mathbf{N}_B), \quad (6.26)$$

каде  $\mathbf{N}_B$  е Гаусова матрица со иста коваријансна матрица како и  $\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B$ ,

Користејќи го ова, за условната ентропија која ни е од интерес на анализа добиваме

$$\begin{aligned} h(\mathbf{Y}_B | \mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B) &\leq M_B \mathbb{E} [\log_2 \det(\nu^2 \mathbf{I}_T + \gamma_R PT \mathbf{V}_A^H \mathbf{V}_A + \gamma_R PT \mathbf{V}_B^H \mathbf{V}_B)] + \log_2 (\pi e)^{TM_B} \\ &= M_B \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{I}_{M_A + M_B} + \frac{\gamma_R PT}{\nu^2} \mathbf{V}_A^H \mathbf{V}_A + \frac{\gamma_R PT}{\nu^2} \mathbf{V}_B^H \mathbf{V}_B)] \\ &\quad + M_B T \log_2 (\pi e \nu^2) \\ &\approx M_B \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{V}_A^H \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B^H \mathbf{V}_B)] + M_B (M_A + M_B) \log_2 \frac{\gamma_R PT}{\nu^2} \\ &\quad + M_B T \log_2 \pi e \nu^2. \end{aligned} \quad (6.27)$$

### 6.3.3 Пресметка на $I(\mathbf{X}_A; \mathbf{Y} | \mathbf{X}_B)$

Комбинирајќи ги релациите (6.24), (6.25) и (6.27) за заедничката информација добиваме

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{X}_A; \mathbf{Y}_B | \mathbf{Y}_B) &\geq M_B(T - M_B - M_A) \log_2 \frac{\gamma_R PT}{\nu^2} + \log_2 |\mathcal{G}_{T, M_R}^{\mathbb{C}}| - M_R T \log_2 M_R \\
&\quad + (T - M_R) \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{H}_{AR} \mathbf{H}_{AR}^H)] + M_B \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{H}_{RB} \mathbf{H}_{RB}^H)] \\
&\quad - M_B \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{V}_A^H \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B^H \mathbf{V}_B)] - (M_B T - M_R M_A) \log_2 \pi e, \\
&\quad + T(M_R - M_B) \log_2 PT.
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Ако сметаме дека  $P = P_R/2$  за високи вредности на SNR и дека  $\gamma_r \approx 1$ , а  $\nu^2 = M\sigma^2 + \sigma^2$ , за заедничката информација добиваме

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{X}_A; \mathbf{Y}_B | \mathbf{Y}_B) &\geq M_B(T - M_B - M_A) \log_2 \frac{PT}{(\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{M})M} + \log_2 |\mathcal{G}_{T, M_R}^{\mathbb{C}}| - M_R T \log_2 M_R \\
&\quad + (T - M_R) \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{H}_{AR} \mathbf{H}_{AR}^H)] + M_B \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{H}_{RB} \mathbf{H}_{RB}^H)] \\
&\quad - M_B \mathbb{E} [\log_2 \det(\mathbf{V}_A^H \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B^H \mathbf{V}_B)] - (M_B T - M_R M_A) \log_2 \pi e, \\
&\quad + T(M_R - M_B) \log_2 PT.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

### 6.3.4 "Pre-log" регион

Добиениот "pre-log" регион во овој случај е следниот

$$\begin{aligned}
\Pi_{R_A} &= \frac{M_A}{2}(T - M_A - M_B); \\
\Pi_{R_B} &= \frac{M_B}{2}(T - M_A - M_B).
\end{aligned} \tag{6.30}$$

## Поглавје 7

# Заклучок

Основен придонес на овој труд се определувањето на некои значајни резултати од областа на некохерентната комуникација кај некои безжични комуникациски мрежи, користејќи ја теоријата на случајни матрици.

Првото поглавје е воведно поглавје и во него се опишува значењето на теоријата на случајни матрици во различни области на истражување, а од друга страна и теоријата на информации при анализа на комуникациските системи.

Во второто поглавје се дадени основни поими од теоријата на случајни матрици, вклучувајќи го дефинирањето на комплексни случајни вектори, факторизации на случајните матрици, како и јакобијаните кои се добиваат при овие факторизации, а ни се од интерес во проблемите кои ги разгледуваме.

Во третото поглавје се дадени основни поими од теоријата на информации, кои ни се од интерес на анализа, вклучувајќи го дефинирањето на поимите ентропија, заедничка информација и капацитет на каналот, како и разгледување на каналот со повеќекратен пристап (MAC) и каналот со реле, кои ни се од посебен интерес на анализа при некохерентна комуникација.

Четвртото поглавје е посветено на резултатите кои досега се познати во областа на некохерентна комуникација, вклучувајќи го капацитетот на “MIMO point-to-point” каналот, и генерирање на кодови во Грасмановите многуобразија, кои се релевантните кодни простори во некохерентно сценарио.

Во петтото поглавје се анализира некохерентна комуникација кај MAC и со користење на теоријата на случајни матрици се добиваат резултати за условната ентропија за различни вредности на односно сигнал-шум (SNR), кои досега не се определни при анализа на некохерентна комуникација. Исто така е презентирана и густината на распределба на приемниот сигнал која е потребна за определување на ентропијата на приемниот сигнал при некохерентна комуникација во случајот на MAC, и останува предмет за идни истражувања.

Во шестото поглавје направена е анализа на некохерентна комуникација кај “two-way” каналот со реле. Главен акцент е определувањето на “pre-log” регионот за ваквиот комуникациски систем, за различни вредности на бројот на предавателни и приемни антени.

Проблемите на кои наидувавме овде најчесто се решаваат со помош на факторизација на случајните матрици, барање на некои распределни на сопствените вредности на случајните матрици како и барање на ентропии од случајните матрици. Односно со ова се гледа примената на теоријата на случајни матрици при определување на некои фундаментални граници кај некои безжични комуникациски мрежи, а со тоа се отвараат и нови проблеми кои се од интерес на анализа, а се поврзани со она што го имаме добиено. Сето ова придонесува многу во идни вакви истражувања, односно истражувања поврзани со некохерентна комуникација.

# Користена литература

- [1] Thomas M. Cover and Joy A. Thomas. *Elements of Information Theory*. Wiley-Interscience, 2nd Edition, 2006.
- [2] Alan Edelman and N Raj Rao. Random matrix theory. *Acta Numerica*, 14(1): 233–297, 2005.
- [3] Greg W Anderson, Alice Guionnet, and Ofer Zeitouni. *An introduction to random matrices*, volume 222. Cambridge Univ. Press, 2010.
- [4] Arup Bose, Sourav Chatterjee, and Sreela Gangopadhyay. Limiting spectral distributions of large dimensional random matrices. *J. Indian Statist. Assoc*, 41(2): 221–259, 2003.
- [5] Bertrand M. Hochwald and Thomas L. Marzetta. Unitary space-time modulation for multiple-antenna communications in rayleigh flat fading. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 46(2):543–564, 2000.
- [6] Thomas L. Marzetta and Bertrand M. Hochwald. Capacity of a mobile multiple antenna communication link in Rayleigh flat fading. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 45(1):139–157, January 1999.
- [7] Lizhong Zheng and David N. C. Tse. Communication on the grassmann manifold: A geometric approach to the noncoherent multiple-antenna channel. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 48(2):359–383, 2002.
- [8] Zoran Utkovski, Pi-Chin Chen, and Juergen Lindner. Some geometric methods for construction of space-time codes in grassmann manifolds. In *Communication, Control, and Computing, 2008 46th Annual Allerton Conference on*, pages 111–118. IEEE, 2008.
- [9] David Tse and Pramod Viswanath. *Fundamentals of wireless communication*. Cambridge university press, 2005.
- [10] Paolo Barone. A generalization of bartlett’s decomposition. *Statistics & probability letters*, 81(3):371–381, 2011.

- 
- [11] Alain Rouault. Asymptotic behavior of random determinants in the laguerre, gram and jacobi ensembles. *arXiv preprint math/0607767*, 2006.
- [12] Alain Rouault. Pathwise asymptotic behavior of random determinants in the uniform gram and wishart ensembles. *arXiv preprint math/0509021*, 2005.
- [13] George AF Seber. *A matrix handbook for statisticians*, volume 15. Wiley-Interscience, 2008.
- [14] Alan Edelman, Tomás A Arias, and Steven T Smith. The geometry of algorithms with orthogonality constraints. *SIAM journal on Matrix Analysis and Applications*, 20(2):303–353, 1998.
- [15] Fredrik Rusek, Angel Lozano, and Nihar Jindal. Mutual information of iid complex gaussian signals on block rayleigh-faded channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 58(1):331–340, 2012.
- [16] Inès Kammoun and Jean-Claude Belfiore. A new family of grassmann space-time codes for non-coherent mimo systems. *Communications Letters, IEEE*, 7(11):528–530, 2003.
- [17] Tome Eftimov and Zoran Utkovski. Mutual information of isotropically distributed unitary signal on block rayleigh-faded multiple access channels, 2013. Poster presented at European School of Information Theory , April 22–26, Ohrid, Republic of Macedonia.
- [18] Marija Miteva, Tome Eftimov, and Zoran Utkovski. Some random matrix results with application to the multiple access channels, 2013. Poster presented at European School of Information Theory , April 22–26, Ohrid, Republic of Macedonia.
- [19] Babak Hassibi and Thomas L. Marzetta. Multiple-antennas and isotropically random unitary inputs: the received signal density in closed form. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 48(6):1473–1484, 2002.
- [20] Zoran Utkovski and Tome Eftimov. A pre-log region for the non-coherent mimo two-way relaying channel, 2013. Invited paper at IEEE EUSIPCO 2013, September 2013, Marrakech, Morocco.